



系统评估、预测、决策与优化研究论丛

灰色预测与决策 模型研究

党耀国 刘思峰 等 著
王正新 林 益



科学出版社

www.sciencep.com

系统评估、预测、决策与优化研究论丛

科技生产力形成与流动效应研究

灰色系统理论及其应用（第五版）

灰色博弈理论及其应用

» 灰色预测与决策模型研究

不确定性群体决策理论与方法

服务品牌延伸的灰色评估模型研究及分析

科技活动效率评价方法与实证研究

区域新兴产业生长机理研究

区域产业结构优化理论与实践

路桥项目后评价理论与方法

政府节能政策绩效评价

本书全面介绍了灰色系统预测和决策的基本理论、基本方法，是作者长期从事灰色系统预测和决策模型研究与实际应用的总结。全书共分9章，内容包括灰色预测与决策模型研究现状分析、缓冲算子及其性质、灰色预测模型、GM(1, 1)模型的优化、GM(1, 1)幂模型、灰色关联分析模型、灰色聚类分析、灰色不确定性决策模型、区间数决策模型及其具体应用案例。

高等教育出版中心·经管法出版分社

电话：010-64030850

E-mail: linjian@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-026025-3



9 787030 260253

定价：35.00 元

系统评估、预测、决策与优化研究论丛

灰色预测与决策模型研究

党耀国 刘思峰 等 著
王正新 林 益

国家自然科学基金课题

教育部博士学科点科研基金、人文社会科学研究基金

江苏省高等学校优秀科技创新团队科研基金

江苏省自然科学基金重点课题

资助项目

南京航空航天大学博士创新与创优基金

南京航空航天大学科研创新基金

南京航空航天大学研究生培养规划基金

南京航空航天大学科学发展研究中心重点工程

科学出版社

北 京

总 序

决策的本质含义是“做出决定”或“决定对策”，即根据实际情况和预定目标来确定应采取的行动。对决策的理解有广义和狭义之分。从广义上讲，决策是指提出问题、确定目标、拟订方案、收集资料、分析评估、方案选择以及实施、反馈、修正等一系列活动的全过程；从狭义上讲，决策仅指决策全过程中方案选择这一环节，习惯上称为“拍板”。也有人仅仅把决策理解为在不确定条件下选择方案，即做出抉择，同时需要承担一定的风险。决策理论和决策方法的研究历来受到高度重视。做出正确决策的前提是对系统演化进程、现状和当前环境的准确评价以及据此对系统未来变化做出科学预测。面对复杂的决策问题，按照科学发展观的要求，人们必须首先进行缜密的诊断和评价，对系统及其环境形成正确的认识，把握系统及其环境的演化规律，进而对其未来变化动态做出科学预测。依据科学预测，才可能做出正确决策，实现科学发展。系统评估、预测、决策三位一体，是人们从事科技、经济、社会活动过程的重要环节，属于系统研究和实践中不可或缺的要素和有机组成部分。

20 世纪 80 年代中后期，刘思峰同志带领一批青年教师围绕以灰色系统理论为主导的系统分析定量方法和模型技术的创新和应用进行探索，不断取得新的进展。2000 年，刘思峰同志作为特聘教授被引进南京航空航天大学，一批富有朝气的中青年教师通过人才引进、进站开展博士后研究、攻读博士学位等途径聚集起来，逐步形成了具有一定规模的系统分析定量方法和模型技术研究团队。共同的学术兴趣和愿景形成强大的团队向心力和凝聚力，团队成员精诚团结，科研创新与教学改革并举，致力于系统评估、预测、决策方法研究、应用和人才培养，取得一批有影响的成果：先后获省部级科技成果奖 11 项，国际奖 4 项，论著被国内外学者引用 6 000 多次；10 位博士生获得江苏省和南京航空航天大学研究生创新基金资助，19 位博士后获得国家 and 江苏省博士后基金资助；12 篇硕士论文被评为江苏省和南京航空航天大学优秀硕士学位论文，9 篇博士论文被评为江苏省和南京航空航天大学优秀博士学位论文。该研究团队 2005 年被评为南京航空航天大学首批 5 个创新研究群体之一，2007 年被评为江苏省高等学校首批优秀科技创新团队。学术团队建设强有力地支撑了学校的专业和学科建设。南京航空航天大学工业工程专业被评为江苏省品牌专业，工商管理专业被评为江苏省特色专业，管理科学与工程学科 2006 年被评为江苏省重点学科，系统工程学科 2008 年被评为国防重点学科。

该研究论丛的素材主要源自该研究团队近年来完成的 40 多项国家级和省部级自然科学、社会科学基金课题和联合国开发计划署、联合国教科文组织、国家发展和改革委员会、中国科学技术协会、江苏省发展和改革委员会、江苏省科学技术厅、江苏省科学技术协会及南京市、苏州市、马鞍山市政府有关部门、企事业单位重点招标课题的研究成果,并以该研究团队成员在国内外重要期刊发表的近 300 篇学术论文为支撑。

该研究论丛选题覆盖灰色系统理论、科技活动效率评价、新兴产业生长机理、重大工程项目评价、政策评价、不确定性群体决策理论与方法等领域,体现了该研究团队研究工作的鲜明特色:突出定量方法与模型技术,强调理论与实践紧密结合,注重从实际应用领域提炼科学问题,并注意将理论、方法研究成果及时应用到实际中,接受实践检验。

《灰色系统理论及其应用》(第五版)系统地论述了灰色系统的基本理论、基本方法和应用技术,是该书作者长期从事灰色系统理论探索、实际应用和教学工作的结晶,同时吸收了国内外同行近年来取得的理论和应用研究新成果,精辟地向读者展示出灰色系统理论这一新学科的概貌及其前沿发展动态。

《灰色博弈理论及其应用》运用灰色系统思想和理论体系解决博弈中有限知识、有限理性和未来不确定性等因素造成的信息缺失问题。该书作者将经典博弈扩展到了灰数空间,引入基于纯策略和混合策略的灰矩阵博弈模型以及灰色双矩阵静态、动态博弈的纳什均衡分析模型,研究了灰博弈解的风险问题,提高了博弈论对现实世界的解释力。

《灰色预测与决策模型研究》侧重于研究灰色不确定性信息背景下的预测与决策问题,对冲击扰动系统预测、灰色不确定性预测模型、灰色不确定性决策模型进行深入探讨与拓展研究,进一步完善了灰色系统理论与方法的科学体系,扩展了灰色预测、决策理论与方法的适用范围。

《服务品牌延伸的灰色评估模型研究及分析》在对服务品牌延伸评估体系和模式进行深入研究的基础上,提出了服务品牌延伸的消费者选择模型,构建了服务品牌延伸的灰色评估模型,对中国背景下的服务品牌延伸进行了灰色综合关联优势分析,结合灰色关联度中的信息集结问题,建立了基于随机不确定数的服务品牌延伸评估模型。该书作者对服务品牌延伸评估规律和机理的探索具有重要的意义和价值。

《科技生产力形成与流动效应研究》从科技生产力流动的概念入手,以科技生产力的形成与流动为主线,研究了科技生产力及其流动的测度、科技生产力流动的成本与效益、科技生产力的优化配置、科技生产力流动的博弈策略、科技生产力流动与新兴产业成长等问题,并结合我国科技生产力形成与演化过程进行实证研究,揭示了科技生产力流动的机理、特性、效应与模式。研究结果对于促进

我国科技生产力的有序流动和优化配置、推动科技发展和新兴产业成长具有实际指导意义。

《科技活动效率评价方法与实证研究》主要包括七个方面的内容：评价指标体系建立的定量方法研究、评价模型和方法的拓展、地域科技活动效率的评价、四大地区科技活动的效率评价、大中型工业企业的科技活动评价、高技术产业科技活动的效率评价、提高科技活动效率的策略。

《区域新兴产业生长机理研究》以世界产业转移为背景，以实现区域产业跨越式发展为目标，以区域新兴产业的生长过程为主线，探索区域新兴产业形成、生长的内在机理和规律，论述了政府选择、培育新兴产业的方式和时机等关键问题，主要包括：①区域新兴产业“种子”因素创生、植入的动力机制和区位条件，“种子”因素流动的区位指向，区域新兴产业“核”生长期以及“核”与相关经济实体的互动规律；②区域新兴产业形成与生长的“社会关系因子”、“网络地位因子”和“社会环境因子”建设问题，并给出了定量的模型描述和可行的解决方案；③研究了区域新兴产业的两种生长模式——“创生型”和“移入型”生长模式的设计问题；④研究了要素流动对区域新兴产业生长各阶段的作用及其测算与识别方法，构建了要素流动对新兴产业加速成长的强化效应模型，分析了新兴产业发展的空间扩散效应，为政府管理部门如何有效推动区域新兴产业成长提供了可资参考的对策和建议。

《区域产业结构优化理论与实践》是该书作者长期从事产业结构优化理论探索、实际应用的结晶。该书主要采用灰色系统有关理论作为分析工具，将灰色系统理论与产业结构优化融会贯通，主要包括产业结构优化的含义及其机理、产业结构演变规律、产业结构的合理化、产业结构的高级化、地区产业结构优化以及产业结构关联性分析、灰色动态线性规划模型、区域主导产业评价指标体系及选择、产业结构调整“快车道”模型、产业结构有序度测度等内容。

《路桥项目后评价理论与方法》从路桥投资项目的特点入手，首先将后评价的视野向前后两个方向深度拓展。该书作者结合承担的路桥项目后评价课题，对后评价的程序、内容、方法、模型和理论进行深入研究，揭示了路桥投资项目的运营机制、管理机制和反馈机制及其作用路径，设计了服务于中央和地方政府路桥项目投资辅助决策的后评价领导、管理和执行组织框架，应用基于优势关系的粗糙集方法对验收评分数据进行处理，导出用于路桥投资项目后评价的偏好模型，构建了基于灰参数的项目过程灰色“追溯”肯定型网络模型，并给出了网络节点时间参数、作业时间参数、灰色关键路线等问题的算法。

《政府节能政策绩效评价》揭示了我国节能政策的动态演进规律，对若干重要节能政策群的能源节约贡献度进行定量测算，基于多种评价方法对高耗能行业 and 重点区域节能政策实施效果进行定量评价，建立节能政策评价指标体系，对我

国节能政策实施效果进行多尺度综合效应评价。

《不确定性群体决策理论与方法》研究群决策网络中决策者的偏好表达方式,分析各类偏好信息的适用条件和应用特点,挖掘能准确反映决策者偏好的信息表达,建立决策群体不确定性偏好信息是否有效的度量标准,研究不确定性偏好信息的一致性度量与一致性改进方法,建立不确定性偏好信息权重求解的统一模型,提出群决策复杂网络关键决策阶段和群体贡献度比较模型及多阶段时序特性多类结构的不确定性偏好信息集结方法,分析决策环境扰动对群体决策效果的动态影响及演化规律。

该研究论丛是各位作者长期从事相关领域研究、应用和教学工作的结晶。达尔文有一句名言:“最有价值的知识是关于方法的知识。”该研究论丛聚焦系统评估、预测、决策与优化方法,具有十分重要的学术意义和实际应用价值。我十分乐意向读者推荐该研究论丛,相信该研究论丛的出版一定能有力地推动我国系统评估、预测、决策与优化定量方法及模型技术领域的研究和深入应用,促进科技、经济、社会等领域实现科学发展。

中国科学院院士

陈达

2008年9月22日

前 言

本书侧重于研究灰色不确定性信息背景下的预测与决策问题,对灰色不确定性预测模型、灰色不确定性决策模型进行深入探讨与拓展研究,进一步完善了灰色系统理论与方法的科学体系、扩展了灰色预测、决策理论与方法的适用范围。

灰色系统理论是以“部分信息已知、部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象,主要通过对“部分”已知信息的生成、开发,提取有价值的信息,实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控。贫信息不确定性系统的普遍存在决定了这一新理论具有十分广阔的发展前景。灰色不确定性预测与灰色不确定性决策是现代预测与决策科学的一个重要领域,它在社会、经济、科技各领域中具有广泛的应用。

本书以作者完成的大量有关灰色预测与决策方面的科研项目为基础总结提炼而成,是作者长期从事灰色预测与决策理论探索与实际应用的结晶。本书从缓冲算子的构造入手,研究了GM模型的优化与拓展,并提出了基于实数和区间数的灰色不确定性决策模型。全书共分9章,包括灰色预测与决策模型研究现状分析、缓冲算子及其性质、灰色预测模型、GM(1,1)模型的优化、GM(1,1)幂模型、灰色关联分析模型、灰色聚类分析、灰色不确定性决策模型、区间数决策模型及其具体应用案例。

本书第1、2章由刘思峰执笔,第3章由谢乃明、王正新执笔,第4章由王正新执笔,第6章由林益执笔,第5、7~9章由党耀国执笔。张卓、方志耕、李炳军、罗党、王子亮、营利荣、刘斌、冯春安、崔杰、米传民、陈可嘉、关叶青、翟振杰、宋捷、王庆丰、胡明礼、曹明霞、王叶梅、钱吴永、杨知、米传民、王建玲、王育红、薛信莉、袁潮清、董一哲、孙玉刚、陆剑峰、仇芝、张敏、石岩、胡坤等同志参加了相关课题的研究,为本书的形成作出了积极贡献。

本书相关研究得到国家自然科学基金(70403037, 70701017)、教育部博士学科点科研基金(200802870020)、教育部人文社会科学研究基金(08JA630039)、江苏省自然科学基金重点课题(BR2003211)、江苏省哲学社会科学基金重点课题(07EYA017)、江苏省软科学基金(BR2008081)、江苏省后评价研究中心重点课题、江苏省高等学校优秀科技创新团队科研基金(灰色系统创新团队)、南京航空航天大学“十一五”研究生人才培养规划基金、南京航空航天大学博士创新创优基金、南京航空航天大学科研创新基金的资助,属于南京航空航天大学科学发展研究中心重点工程。在编写过程中,作者参阅了大量的文

献资料，吸收了许多专家、学者的研究成果；中国科学院院士陈达先生在百忙之中为本套丛书撰写总序；科学出版社的领导和老师对本书的出版给予大力支持。在此一并表示衷心感谢！

由于作者水平有限，本书的疏漏及不足在所难免，敬请同行及读者不吝指正。

党耀国

2009年8月

内 容 简 介

本书全面介绍了灰色系统预测和决策的基本理论、基本方法,是作者长期从事灰色系统预测和决策模型研究与实际应用的总结。全书共分9章,内容包括灰色预测与决策模型研究现状分析、缓冲算子及其性质、灰色预测模型、GM(1,1)模型的优化、GM(1,1)幂模型、灰色关联分析模型、灰色聚类分析、灰色不确定性决策模型、区间数决策模型及其具体应用案例。

本书可作为高等院校经济、管理类各专业高年级本科生和研究生教材或教学参考书,也可供政府部门、科研机构及企事业单位的科技、经济、社会系统预测和决策分析人员参阅。

图书在版编目(CIP)数据

灰色预测与决策模型研究/党耀国等著. —北京:科学出版社,2009
(系统评估、预测、决策与优化研究论丛)

ISBN 978-7-03-026025-3

I. 灰… II. 党… III. 灰色预测模型:决策模型—研究 IV. N949

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第208781号

责任编辑:林建房 阳/责任校对:李奕莹

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年12月第一版 开本:B5(720×1000)

2009年12月第一次印刷 印张:12 3/4

印数:1—2 500 字数:262 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

目 录

总序

前言

第1章 灰色预测与决策模型研究现状分析	1
1.1 灰色预测与决策模型研究的目的与意义	1
1.2 灰色系统理论发展的现状	2
1.3 灰色预测与决策理论研究综述	3
1.4 本书内容安排与研究的技术路线	12
第2章 缓冲算子及其性质	16
2.1 缓冲算子的基本概念	16
2.2 弱化缓冲算子的构造	19
2.3 弱化缓冲算子的性质及应用	23
2.4 强化缓冲算子的构造	30
2.5 强化缓冲算子的性质与应用	35
第3章 灰色预测模型	39
3.1 GM(1, 1) 模型	39
3.2 离散灰色模型	42
3.3 离散灰色模型的拓展与优化	46
3.4 近似非齐次指数增长离散灰色模型	52
3.5 多变量灰色预测模型	55
第4章 GM(1, 1) 模型的优化	58
4.1 GM(1, 1) 模型背景值的优化	58
4.2 GM(1, 1) 模型求解方法的优化	66
4.3 无偏灰色模型的递推解法与优化	72
第5章 GM(1, 1) 幂模型	81
5.1 GM(1, 1) 幂模型求解方法的优化	81
5.2 无偏 GM(1, 1) 幂模型	86
第6章 灰色关联分析模型	96
6.1 灰关联空间	96
6.2 指标数据序列生成及其性质	97
6.3 几种灰色关联度的适用范围	100

6.4	灰色综合关联度	103
6.5	灰色斜率关联度的改进及其算法	106
6.6	广义灰色绝对关联度模型的改进	110
6.7	区间数关联度	114
第7章	灰色聚类分析	120
7.1	灰色综合聚类分析模型	120
7.2	两阶段灰色聚类分析模型	124
7.3	两种灰色聚类方法结果一致性研究	127
7.4	白化权函数分类区分度的变权灰色聚类	130
第8章	灰色不确定性决策模型	136
8.1	动态多指标灰色关联决策模型	136
8.2	灰色综合聚类决策模型	140
8.3	多指标加权灰靶决策模型	152
8.4	灰色层次综合决策模型	155
第9章	区间数决策模型	161
9.1	多指标区间数关联决策模型	161
9.2	区间数多指标灰靶决策模型	166
9.3	区间数灰色局势决策模型	169
9.4	区间数的多目标灰色局势决策模型	174
参考文献		181

第1章 灰色预测与决策

模型研究现状分析

1.1 灰色预测与决策模型研究的目的与意义

1982年,我国学者邓聚龙教授创立灰色系统理论。20多年来,灰色系统理论得到迅速发展。它以“部分信息已知、部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象,主要通过对“部分”已知信息的生成、开发,提取有价值的信息,实现对系统运行行为、演化规律的正确描述和有效监控。贫信息不确定性系统的普遍存在,决定了这一新理论具有十分广阔的发展前景。近年来,灰色系统理论发展较快,其理论体系与结构已初步建立,尤其是它在众多科学领域中的成功应用,已赢得了国际学术界的广泛肯定和关注。

灰色系统理论基于对少数据、贫信息系统的特征、运行机制和表现行为的分析,揭示少数据、贫信息背景下事物的演化规律,为人类正确认识 and 把握少数据、贫信息系统提供理论支持。在少数据不确定性背景下,对数据的处理、现象的分析、模型的建立、发展趋势的预测、重大事项的决策等都是灰色系统理论的主要技术内容。灰序列算子、灰色GM预测模型、灰色关联分析、灰色聚类分析和灰色决策方法等是灰色系统理论的重要组成部分。由于灰色系统理论主要是研究“小样本”、“贫信息”不确定性问题,因此充分开发利用已占有的信息来挖掘系统本身固有的规律是灰色系统理论研究的基本准则。人们通常基于对社会、经济、生态等系统的行为特征数据的分析,来寻求因素之间或因素自身的演化规律。灰色系统理论就是通过对原始数据的整理来发现系统的变化规律。灰色系统理论认为,尽管客观系统的表象复杂,数据离乱,它们总有自身的整体功能,必然蕴藏某种内在规律,关键是如何选择适当的方法去挖掘和利用它。因此序列算子生成是灰色系统理论研究的基础,通过序列算子的作用,能够使常常出现的定量研究结果与定性分析结论不符的问题得到有效的解决。

灰色GM预测模型,一般是指GM(1,1)模型及其扩展形式,主要包括GM(1,1)模型、DGM(1,1)模型和灰色Verhulst模型等。它是一个近似微分、差分方程的模型,具有微分、差分、指数兼容等性质,模型的参数、结构随着时间推进而改变,突破了一般建模方法要求大样本数据的局限,是建模思路和方法上的创新。目前,GM(1,1)模型及其扩展形式已经被广泛应用于工业、农业、社会、经济等领域,其应用价值已经逐渐为人们所认识。因此,进一步优

化和改进灰色预测模型,提高它的预测精度和拓广它的适用范围,使它更好地服务于社会,有着十分重要的意义。

灰色关联分析是一种新的因素分析方法,运用灰色关联度模型定量测算系统变量之间关系的密切程度(或影响大小)。其基本思想是通过研究系统序列曲线的几何接近程度来体现系统序列之间关系的密切程度,即曲线的几何接近程度越高,则它们之间的关联度就越大。灰色关联分析在因素分析、聚类评估、方案决策、优势分析等方面具有广泛的应用。关于灰色关联分析保序性及灰色关联模型的建模机理等研究皆属于对灰色系统理论发展有重要意义的课题。

灰色聚类分析方法是一种新的不确定性系统决策方法。我们在科学研究和现实生活中遇到和处理的许多决策问题,皆可在一定程度上视为不确定性问题。灰色聚类分析克服了传统的用单一值评价多因素多指标问题的弊病。关于灰色聚类分析排序性及灰色聚类综合决策模型的建模机理等研究目前涉及的还不多。

关于多目标决策(multiple attribute decision making, MADM)问题的研究目前主要集中在解决具有多个指标、有限个方案的观测值为实数的静态决策问题,关于动态决策研究,现在还很少见。已有的文献大多是将较成熟的静态多指标决策理论和方法移植到动态决策问题上;从检索结果看,关于灰色加权灰靶决策、区间数关联决策及灰色综合聚类决策等方面的研究还不多。由于在工程技术系统、社会、经济、管理中存在众多多时段或阶段的综合决策与评价问题,将灰色系统理论与多目标决策理论相结合,通过灰色关联分析与灰色聚类决策模型的建立,研究灰色关联决策模型、灰色综合聚类决策模型、灰色加权灰靶决策模型等决策模型的建模机理,具有重要的理论意义和重要的实用价值。

1.2 灰色系统理论发展的现状

近年来,关于灰色序列算子和灰色序列生成、灰色关联分析、灰色聚类分析和灰色决策理论等方面的研究取得了较大进展。1989年在英国创办的英文版国际学术刊物《灰色系统学报》(*The Journal of Grey System*)已成为SCI、《英国科学文摘》(SA)、《美国数学评论》(MR)等重要国际文摘机构检索的核心期刊;1995年在台湾创办了英文版国际学术刊物 *Journal of Grey System*。全世界有几百种学术期刊接受、刊登灰色系统论文,美国计算机学会会刊、台湾《模糊数学通讯》、系统与amp;控制国际杂志 *Kybernetes* (SCI源期刊)出版了灰色系统专辑。目前,英国、美国、德国、日本、澳大利亚、加拿大、奥地利、俄罗斯、南非、中国台湾和香港等地及国际组织有许多知名学者从事灰色系统的研究和应用。国内许多学者也在致力于灰色系统理论的研究。河北经贸大学王清印教授的B型关联度与C型关联度、南京航空航天大学刘思峰教授的缓冲算子与广义灰色

关联度、山东大学王子亮博士的灰色建模技术、福州大学张岐山教授的灰色嫡、武汉理工大学肖新平博士的灰色最优聚类等,都是有价值的建树。还有许多学者在灰色系统的不同领域作了大量深入的研究,为灰色系统理论的发展作出了重要贡献。

据统计,全国各地有几百项灰色系统成果获得国家或省部级奖励。2002年,我国灰色系统学者刘思峰教授获系统与控制世界组织奖。据不完全统计,SCI, EI, ISTP, SA, MR, MA等国际权威检索机构跟踪、摘引我国学者的灰色系统论著10000多次。中国国家科技部编撰出版的《中国科学技术蓝皮书(第8号)》把灰色系统理论作为中国学者创立的软科学新方法加以肯定。

许多重要国际会议,如不确定性系统建模国际会议、系统与控制世界组织年会,IEEE系统、人、控制国际会议,系统预测控制国际会议,国际一般系统研究会年会,计算机与工业工程国际会议等,把灰色系统理论列为讨论专题。如2002~2009年系统与控制世界组织(WOSC)12届至14届年会连续安排灰色系统专题会议;IEEE SMC在2004~2009年连续5届安排灰色系统专题会议;2003年8月在爱尔兰利默瑞克召开的第32届计算机与工业工程国际会议,为灰色系统理论安排了4场专题会议;2004年11月在日本冈山召开的第7届工业工程国际会议,为灰色系统理论安排了4场专题会议。2007年首届IEEE灰色系统与智能服务国际会议(IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services)在南京航空航天大学召开,并商定此后每两年举办一次。2008年,IEEE灰色系统委员会在南京航空航天大学成立。灰色系统理论已成为许多重要国际会议关注与讨论的热点,对于世界系统科学界的同行进一步了解灰色系统理论无疑会起到积极作用。

1.3 灰色预测与决策理论研究综述

1.3.1 序列算子生成

灰色序列算子与灰色序列生成,其实质就是对原始序列进行变换,通过对原始数据序列的变换使具有冲击扰动的系统减少冲击波的干扰。常见的序列算子有缓冲算子、初值化生成算子、均值化生成算子、区间值化生成算子等。

初值化生成算子就是利用序列 $X^{(0)}$ 的第一个值 $x^{(0)}(1)$ 去除序列中的每一个数值,来获得初值化生成序列,它的作用就是以初值 $x^{(0)}(1)$ 为基点对事物进行分析,考察事物的发展态势。

均值化生成算子就是利用序列 $X^{(0)}$ 的平均值 $\bar{x}$ 去除序列中的每一个数值,来获得均值化生成序列,它的作用就是以平均化的观点来对事物进行分析,考察事物的发展态势。

区间值化生成算子就是利用数据在序列 $X^{(0)}$ 中数据区间的相对位置来获得区间值化生成序列,它的作用就是利用原始数据序列的最大值与最小值所制约的区间对事物进行分析。

灰色系统理论就是通过序列算子的作用,寻求对序列或因素之间的特性及其内在关系,使扰动数据序列的扰动因素得以减弱。

邓聚龙教授提出了累加生成算子与累减生成算子。

设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 为原始序列, D 为序列算子,

$$X^{(0)}D = \{x^{(0)}(1)d, x^{(0)}(2)d, \dots, x^{(0)}(n)d\}$$

若

$$x^{(0)}(k)d = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则称 D 为 $X^{(0)}$ 的累加生成算子,记为 AGO;

若

$$x^{(0)}(k)d = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

则称 D 为 $X^{(0)}$ 的累减生成算子,记为 IAGO。

累加生成是使灰色过程由灰变白的一种有效方法,通过累加可以看出灰量积累的发展态势,使离乱的原始数据中蕴含的积分特性或规律充分显露出来;宋中民研究了 AGO 数据序列的性质;肖新平利用矩阵的形式表示了 AGO 生成空间;宋中民还提出了生成空间映射,并从数学上证明了累加生成与累减生成均为线性变换,且它们互为逆变换;还提出了反向累加生成算子。

设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 为原始序列, D 为序列算子,

$$X^{(0)}D = \{x^{(0)}(1)d, x^{(0)}(2)d, \dots, x^{(0)}(n)d\}$$

其中

$$x^{(0)}(k)d = \sum_{i=k}^n x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则称 D 为 $X^{(0)}$ 的反向累加生成算子,记为 OAGO。

邓聚龙教授讨论了非负序列的 IAGO 生成;肖新平讨论了 r -IAGO 生成的基矩阵的性质;邓聚龙教授还提出了级比生成和光滑比生成,级比生成可用来填补序列端点的空穴;对于序列中含有空穴,用非紧邻均值生成来填补空穴;级比还是检验数据序列是否可以建立 GM(1, 1) 模型的检验条件;李群教授提出了基于隶属函数的扰动算子;刘思峰教授在冲击扰动系统预测研究中,提出了消除序列冲击扰动的新方法——缓冲算子的概念,设 D 为序列算子,如果序列算子满足缓冲算子三公理(即不动点公理、信息充分利用公理、解析规范化公理),则称序列算子 D 为缓冲算子;缓冲算子包括强化缓冲算子与弱化缓冲算子。强化

缓冲算子对序列作用后使序列的增长(或衰减)速度加快或振幅增大, 弱化缓冲算子对序列作用后使序列的增长(或衰减)速度减缓或振幅减小, 并且还构造了一种性能优良的且比较实用的弱化缓冲算子, 解决了在冲击扰动系统中的预测问题。缓冲算子主要适用于在系统数据失真情况下的建模, 实现了定性分析结果与定量模型的有机结合。

设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 为原始序列, D 为序列算子,

$$X^{(0)}D = \{x^{(0)}(1)d, x^{(0)}(2)d, \dots, x^{(0)}(n)d\}$$

其中

$$x^{(0)}(k)d = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n x^{(0)}(i), \quad k=1, 2, \dots, n$$

当 $X^{(0)}$ 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时, D 皆为弱化缓冲算子。在此基础上, 党耀国等构造了一类弱化缓冲算子和强化缓冲算子并研究了它们的应用范围。弱化缓冲算子在实际中得到了广泛的应用。

关于序列算子生成, 还有一些是从序列的光滑性方面入手进行讨论的, 他们的目的都是通过对原始序列进行变换, 使生成序列的光滑性比原始序列的光滑性有所提高。用来提高序列光滑性的序列算子主要有: 对数变换生成算子、幂函数变换生成算子、对数-幂函数变换生成算子、平移变换生成算子等。

设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ 为原始序列, D 为序列算子,

$$X^{(0)}D = \{x^{(0)}(1)d, x^{(0)}(2)d, \dots, x^{(0)}(n)d\}$$

若

$$x^{(0)}(k)d = \ln(x^{(0)}(k)), \quad k=1, 2, \dots, n$$

则称 D 为对数变换生成算子;

若

$$x^{(0)}(k)d = (x^{(0)}(k))^{1/T}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

则称 D 为幂函数变换生成算子;

若

$$x^{(0)}(k)d = [\ln(x^{(0)}(k))]^{1/T}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

则称 D 为对数-幂函数变换生成算子;

若

$$x^{(0)}(k)d = x^{(0)}(k) - c, \quad k=1, 2, \dots, n$$

则称 D 为平移变换生成算子。

上述四类变换均能使原始序列的光滑度有所提高, 王子亮还对平移变换生成算子对数据序列特性的影响及其对灰色建模的意义进行了研究; 刘孝贤对平移变换生成算子的生成作用进行了研究; 有些学者还详细讨论了上述四类变换对提高

原始序列光滑度效果的差异,结论表明对数-幂函数变换生成算子的效果最好。

黄福勇讨论了提高序列光滑性的存在条件,但王子亮指出,序列有较高的光滑度只是建模的必要条件,而有较高光滑度的序列,并不能保证所建模型具有较高的精度。

邓聚龙教授还指出,采用均值化、初值化等加权算子对原始序列进行处理,不具备减小级比偏差的功能,因此邓教授采用信息差异的方法,对指数算子、幂函数算子、平移算子建立的原理作了详细的论述。

上述序列变换生成算子都是序列在等时距(间距)情况下进行的序列算子变换,也就是原始序列在相同时间间隔下所得到的序列,但在实际中还存在非等时距序列,一些学者对非等时距序列变换算子的构造及其作用进行研究。非等时距序列的变换算子主要是通过变换算子使非等时距序列变换为等时距序列。

以上所有序列变换算子可以说是从两个方面考虑建立的变换算子,一是通过变换算子作用使原始序列标准化;二是通过变换算子对原始序列作用使序列的光滑性得以提高。通过实际应用比较,在原始序列具有冲击扰动的情況下,使用缓冲算子对原始序列作用效果比较理想。

对原始序列采用均值化变换、始点零象化变换、初值化变换、百分比变换、归一化变换、级差最大化变换、区间值化变换等,使用不同的变换算子处理方法都是采用 $[0, 1]$ 区间上的线性变换方法进行处理,这种方法存在“只奖不罚”的不足。戴文战利用“奖优罚劣”原则,建立一种在 $[-1, 1]$ 上的易于计算且实用的 $[-1, 1]$ 线性生成算子,从而体现了“奖优罚劣”的原则。

1.3.2 GM 预测模型

1.3.2.1 GM 模型背景值的研究

GM(1, 1) 模型的背景值 $z^{(1)}(k)$ 是一个平滑公式,当时间间隔很小、序列数据变化平缓时,这样的背景值是适合的,模型偏差很小,但当序列数据变化较快时,模型偏差往往也比较大。事实上,由 GM(1, 1) 模型的时间响应式可以看出,它的模拟和预测精度取决于参数 a 和 b ,而参数 a 和 b 的值又依赖于原始数据序列和背景值,因此,背景值构造公式是否合理直接影响模型的模拟和预测精度。谭冠军从 $z^{(1)}(k)$ 的几何意义出发,首次提出 GM(1, 1) 模型背景值的优化,给出一个新的背景值计算公式

$$z_m^{(1)}(k+1) = \frac{1}{2m}[(m+1)x^{(1)}(k) + (m-1)x^{(1)}(k+1)], \quad m = 2, 3, \dots, n$$

还有一些学者将背景值 $z^{(1)}(k)$ 推广为 $z^{(1)}(k) = ax^{(1)}(k-1) + (1-a)x^{(1)}(k)$,

其中, $\alpha \in (0, 1)$ 为待定参数。该模型简称为 GM(1, 1, α) 模型, 预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 与 $x^{(0)}(1)$ 无关。从定义上看, 该模型的核心问题是怎样确定参数 α , 向跃霖用黄金分割法, 即 0.618 法搜索最优的 α 值, 目标函数为 $\min S^G = \sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)]^2$; 谢开贵认为参数 α 与误差之间存在明显的非线性特征, 而且某些目标函数不可微, 建议用遗传算法来求解 α 的值; 王义闹等学者对参数 α 与发展系数 a 的关系进行了讨论, 得到以下结论:

$$(1) \alpha = \frac{1}{a} - \frac{1}{e^a - 1};$$

$$(2) \lim_{a \rightarrow 0} \alpha = \frac{1}{2};$$

(3) $\alpha(a)$ 为严格单调递减函数。

并且分别得到了三种确定参数 α 的算法。

罗党等提出了一种优化背景值的新思路, 即用齐次指数函数来拟合一次累加生成序列, 提出了一种背景值构造的方法; 王正新用非齐次指数函数来拟合一次累加生成序列, 并获得了较高的预测精度。

1.3.2.2 优化时间响应函数

GM(1, 1) 模型的实质是利用最小二乘法, 以指数曲线来拟合原始序列的一次累加序列。但是, 在确定时间响应函数时, 以 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 为初始条件, 这就等于让拟合曲线必须过点 $(1, x^{(0)}(1))$, 而这并不一定符合事实, 最小二乘的原理并不要求拟合曲线过第一个数据点。由于灰色系统理论认为新信息在预测过程中作用大于旧信息, 因此党耀国提出以 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(n)$ 为初始条件, 这样新信息可以得到充分利用, 并取得了较好的预测效果。刘斌利用 $x^{(1)}(k)$ 的模拟值和原始数据的 1-AGO 序列的差值平方和最小, 确定时间响应函数中常数 C , 从而构建了优化的 GM(1, 1) 模型。

吉培荣提出了无偏 GM(1, 1) 模型, 改进了 GM(1, 1) 模型的时间响应式

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(k) = \bar{A}e^{\bar{a}(k-1)}, k = 2, 3, \dots, n \\ \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) \end{cases}$$

其中, $\bar{a} = \ln \frac{2-a}{2+a}$, $\bar{A} = \frac{2b}{2+a}$ 。

上述模型对于具有白指数规律的序列数据没有模拟、预测误差, 所以被称为无偏 GM(1, 1) 模型。

谢乃明提出了离散灰色模型, 该模型能够精确模拟指数序列。

1.3.2.3 改进灰色微分方程

由于实际问题中的数据是复杂的,因此 GM(1, 1) 的扩展模型也是多样的。近年来出现了许多扩展的 GM(1, 1) 模型,具有代表性的主要有五种。

(1) GM(1, 1) 幂模型:

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b[z^{(1)}(k)]^a$$

当分别取 $a=0$ 和 $a=2$ 时, GM(1, 1) 幂模型将变成传统的 GM(1, 1) 模型和灰色 Verhulst 模型。

(2) 灰色非线性 GM(1, 1, α) 模型:

$$x^{(0)}(k) + a[z^{(1)}(k)]^\alpha = b$$

当取 $\alpha=1$ 时, GM(1, 1, α) 模型变成传统的 GM(1, 1) 模型。

(3) 含遗传信息的 GM(1, 1) 模型:

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = u - bx^{(1)}(k-1)$$

它对于后效性较强的系统具有较高的预测精度。

(4) GM(1, 1, τ , r) 模型:

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k-\tau) = bk^r, \quad k \geq \tau+2, \tau=0,1,\dots,r$$

它打破了发展系数 $-a \in (-2, 2)$ 的范围,并使模型克服了灰指数律的限制。

(5) 离散灰色模型:

$$x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2$$

亦称为 GM(1, 1) 模型的离散形式。离散灰色模型与 GM(1, 1) 模型可以认为是同一模型的不同表达方式,在 a 取值较小时可以相互替代。

1.3.3 灰色关联分析

邓聚龙教授提出灰色关联空间理论以来,灰色关联分析得到迅猛发展。灰关联分析是灰色系统分析、建模、预测、决策的基石。灰色关联分析主要通过对系统数据序列的几何形状的比较,来分析系统中各因素间的关联程度,即认为序列曲线之间的几何形状越接近,它们之间的关联程度越大。因而关联分析是否能正确反映系统各种因素间的相互影响,关键是如何计算关联度。目前关于关联度的量化模型很多。邓聚龙教授提出的邓氏关联度,利用序列的位移差来反映两序列间的发展过程或量级的相近性。王清印教授提出了灰色 B 型关联度和 C 型关联度,灰色 B 型关联度是根据事物发展过程中的相近性与相似性,为全面考虑事物在发展过程中的异同性,综合考虑总体位移差、总体一阶斜率差与总体二阶斜率差而提出的;C 型关联度是在分析对象与标准事物之间关于位移、速度、加速度的同一性、差异性、对立性的基础上建立的关联度。唐五湘提出了 T 型关联

度,它按照因素时间序列曲线相对变化趋势的接近程度来计算关联度。刘思峰教授提出了广义关联度,它包括灰色绝对关联度、灰色相对关联度及灰色综合关联度,灰色绝对关联度是按照序列折线的相似程度来计算两序列的关联度;灰色相对关联度是基于序列相对于始点的变化率的接近程度计算关联度;灰色综合关联度是既考虑了序列折线的相似程度又考虑了序列相对于始点的变化率的接近程度的一种综合关联度。党耀国提出了灰色斜率关联度,它是用序列折线的斜率的接近程度来表征两序列之间的关联度。赵艳林等提出了灰色欧几里得关联度,它是利用原始序列与选定的参考序列之间的贴近来计算关联度。施宝正研究了点、斜关联度,它是通过点关联度来反映子序列与母序列之间的相似性,通过斜关联度来反映子序列与母序列之间的发展趋势的相似性。李学全提出了改进关联度,它是利用各时段上的连线的夹角来度量折线的相似程度的。刘斌等提出了灰色综合关联度,它是综合考虑了数据序列的绝对变化率与相对变化率的基础上建立的灰色综合关联度。马保国提出了相似关联度,它是在斜率关联度的每一时点的关联系数前乘以1或-1,当参考序列与比较序列的变化趋势一致时取1,变化不一致时取-1。肖新平、吕锋等对各种关联度进行了比较研究,认为以上关联度的定义与关联度四公理作对比,它们均存在一定的缺陷,并对各自产生缺陷的原因进行了分析。孙作安通过建立分辨标准,研究分辨系数对关联度的影响,确定分辨系数的取值。党耀国还提出了区间数关联度。以上这些学者从不同的方面对关联度进行了研究,都取得了一定的应用效果。

黄元亮研究了灰色关联公理与灰色关联度之间存在的矛盾,并提出相应的改进意见;水乃翔指出了邓氏关联度的缺陷,认为它不满足灰色关联四公理中的规范性、一致性;张绍良比较了邓氏关联度、斜率关联度、改进关联度、B型关联度计算方法的优缺点,分析了产生问题的原因;何文章指出了邓氏关联度的序数效应,并指出它与相关系数的差异。

灰色关联分析在自然科学、社会科学和经济管理等领域具有十分广泛的应用,特别是近几年,该方法与工程技术中各学科相结合,解决了现实中的大量不确定性问题,如利用灰色关联分析作土壤元素分析、金矿元素构成分析、作物品种评价、方案选择、工程评标、变速箱故障识别、计算机技能学习因素分析、高校科研产出分析、空中战略物资供应经济效果分析、数据预处理、技术革新能力评价、环境质量评价分析、经济决策分析、灰医学关联分析、高科技项目风险决策。

1.3.4 灰色聚类分析

灰色聚类是根据灰色关联矩阵或灰数的白化权函数将一些观测指标或观测对象聚集成若干个可定义类别的方法。一个聚类可以看成是属于同一类的观测对象的集合。灰色聚类分析一直是灰色系统理论讨论较多的灰色技术之一。

灰色聚类按聚类对象划分,可分为灰色关联聚类和灰色白化权函数聚类。灰色关联聚类主要用于同类因素的归并,以使复杂系统简化。通过灰色关联聚类,可以检查众多因素中是否有若干个因素关系十分密切,使我们既能用这些因素的综合平均指标或其中的某一个因素来代表这几个因素,又使信息不受严重损失。这是属于系统变量的删简问题。在进行大面积调研之前,通过典型抽样数据的灰色关联聚类,可以减少不必要变量的收集,以节省经费。灰色白化权函数聚类主要用于检查观测对象是否属于事先设定的不同类别,以便区别对待。

灰色关联聚类基于指标序列之间的关联度对指标分类。对于给定的临界值,当两个指标序列之间的关联度大于给定的临界值时,就认为这两个指标属于同一类指标;邓聚龙教授提出的灰色变权聚类方法基于白化权函数临界值来计算各指标的权重,该权重受样本值的数量级影响较大,同时若指标间的量纲不同,权重的计算就没有实际意义;张岐山、邓聚龙教授提出了在灰朦胧集上进行灰色聚类,把聚类结果与聚类权序列结合在一起,研究了聚类结果的灰性;刘思峰教授提出了灰色定权聚类决策分析方法,此方法主要是通过定性分析或定量分析的方法(德尔菲法或层次分析法)来确定各指标的权重,然后再利用白化权函数进行灰色聚类;肖新平提出了灰色最优聚类,此方法构造的白化权函数与每一类的标准值都有关系,样本指标的任何实测值对每个类别都不为零,然后计算各类别间的关联度、差异度和广义加权距离的方法进行聚类;许秀莉讨论了灰色聚类分析的改进措施,它是在肖新平提出的灰色最优聚类的基础上进行的改进,在计算关联度时考虑了各指标的权重;邱学军给出了灰色关联聚类分析方法,它是在计算灰色关联度的基础上,计算灰色相似矩阵,根据最大树法或编码法进行聚类;李万海提出了梯形灰色聚类分析法,它是以梯形白化权函数来代替白化权函数进行聚类分析的;刘思峰教授提出了基于三角白化权函数的灰色聚类评估,它是将各个指标的取值范围按评估要求划分为 s 个灰类, $[a_1, a_2], \dots, [a_{k-1}, a_k], \dots, [a_{r-1}, a_r], [a_r, a_{r+1}]$,同时令 $(a_k + a_{k+1})/2$ 属于第 k 个灰类的白化权函数值为1, $((a_k + a_{k+1})/2, 1)$ 与第 $k-1$ 个灰类的起点 a_{k-1} 和第 $k+1$ 个灰类的终点 a_{k+2} 连接,得到 j 指标关于 k 灰类的三角白化权函数 $f_j^k(\cdot)$,最后按灰色定权聚类的方法进行计算;熊和金等讨论了预测灰色聚类问题,他认为灰色聚类的白化聚类数据是变化的,因此他首先利用GM(1, n)模型对白化聚类数据进行预测,然后再按灰色聚类的方法进行计算;邓聚龙教授研究了灰评价的效果,他认为灰色聚类结果的硬结论无回旋、延伸的余地,而软结论具有可回旋性、可解释性、可延伸性。认为灰色聚类系数序列各分量的值越接近,灰色聚类结果就越灰;黎锁平讨论了基于灰色关联分析的多级别聚类评价模型,他根据灰色关联分析的性质,计算时间序列的灰色绝对关联度,并通过构造灰色系统的目标函数,运用Lagrange乘数法建立了一种灰色聚类评价模型;党耀国研究了在聚类系数无显著性差异下的综合聚类评估,并

且证明了灰色聚类按最大原则进行集结的条件下的一般聚类分析与综合聚类分析结果一致性的条件,同时还研究了两阶段灰色聚类方法。

灰色聚类分析在自然科学、社会科学和经济管理等领域具有十分广泛的应用,特别是近几年,该方法与工程技术中各学科相结合,解决了大量现实中的不确定性问题,如在科技评估、岩体边坡稳定性分析、地下水功能区划分析、采矿安全系统评价、灰医学聚类评估分析、社会经济评价、对管理人员的评价、作物品种综合评价、油气勘探等。

1.3.5 灰色决策

目前多指标决策问题的研究主要集中在解决具有多个指标、有限个方案的静态决策问题,戴文战、王坚强讨论了动态决策问题,其基本思想是将较成熟的静态多指标决策理论和方法直接移植到动态决策问题上。由于在工程技术系统、社会、经济、管理中存在大量多时段或多阶段的综合决策与评价问题,这类问题实际上是在决策空间和目标空间的基础上,又增加了一个时间空间,是具有时间、指标、方案的三维决策排序问题。

邓聚龙教授给出了灰靶决策的定义和基本思路;王文平建立了灰靶效用决策模型,是在相对优化意义下求满意效果区域,通过灰靶寻求对应局势的最优局势,一般情况下,最优局势是不存在的,可以转而求次优局势;党耀国建立了多指标加权灰靶决策模型。灰色关联决策是一种因素分析法,它是将系统发展态势进行量化分析。邓聚龙教授对灰色关联决策进行了系统研究,它主要是按灰色关联度的大小进行优势分析,确定各决策方案的顺序;刘家学研究了静态多指标关联决策,把时间数据序列看成是静态数据序列求灰色关联度,然后利用最小二乘法或其他方法对评价对象进行排序决策。还有学者讨论了动态多指标关联决策方法,将时间、指标、方案三维空间的决策问题,通过对原始决策矩阵进行规范化处理,将三维决策问题转化为二维决策问题进行决策排序的;吕锋讨论了多指标决策灰色关联投影法,利用灰色关联度定义灰色判断矩阵,再从矢量投影的角度构造决策方案的排序;邓聚龙教授讨论了灰色聚类决策,他是按灰色聚类系数的最大化原则进行聚类的,同时在每一类中按聚类系数的大小对决策对象进行排序的。邓聚龙教授还讨论了灰色局势决策,主要是根据样本的特性,将样本决策矩阵转换为具有同一极性的决策矩阵,然后根据综合效果测度,寻求最优对策、最优事件与最优局势;何勇、孙光亮分别讨论了层次决策,主要是由于在实际生活中,有许多决策是分层次的,一是决策者层次不同,二是各个层次决策者决策信息的集结方法不同;关于区间数决策问题,主要是对决策样本矩阵、指标权重为区间数的多指标决策问题,利用理想点方案对评价对象进行决策排序。

由于灰色不确定性决策理论的迅速发展,灰色不确定性决策得到很好的应

用。它已应用于社会经济生活中的各个领域,如利用灰色决策进行序列跳跃点的判断、上市公司竞争力的灰色评价、压铸生成过程的优化、地区科技创新能力的综合评价、粮食品质综合评判、投资项目综合决策、考试质量的评价等。

综上所述,灰色预测与决策问题是灰色系统理论的重要研究内容,灰色预测与决策模型研究对灰色系统理论的发展具有重要意义。

1.4 本书内容安排与研究的技术路线

1.4.1 本书的研究内容

(1) 构造缓冲算子——强化缓冲算子与弱化缓冲算子。通过对各种序列算子的比较研究,构造实用的弱化缓冲算子和强化缓冲算子,并研究其内在联系与规律性,从而为解决具有冲击扰动系统的预测问题提供理论依据。缓冲算子主要适用于系统数据失真情况下的建模,实现了定性分析结果与定量模型的有机结合。

(2) 构造具有“奖优罚劣”功能的 $[-1, 1]$ 线性生成算子。由于指标集中的指标具有不同的量纲,在决策时,难以对它们进行直接比较,因而需要对原始效果样本矩阵进行初始化处理,由于初始化处理方法较多,如均值化变换、始点零象化变换、初值化变换、百分比变换、归一化变换、级差最大化变换、区间值化变换等,使用不同的初始化变换处理方法可能会导致评价结果的不同。而现有的对效果样本矩阵的初始化处理采用的都是 $[0, 1]$ 区间上的线性变换方法,这种方法存在“只奖不罚”的不足。因此利用“奖优罚劣”原则,构造一种易于计算且实用的 $[-1, 1]$ 线性生成算子,从而体现“奖优罚劣”的原则。

(3) 灰色预测模型。在分析经典 $GM(1, 1)$ 模型的基础上,重点讨论离散灰色模型、优化离散灰色模型、近似非齐次指数增长序列离散灰色模型、多变量灰色预测模型等最新成果。离散灰色模型则能够精确地模拟指数序列。

(4) $GM(1, 1)$ 模型优化。分别以原始数据序列的模拟值和一阶累加生成序列的模拟值的误差最小化为目标,基于最小二乘原理确定时间响应函数中常数 C ,从而构建了新的优化的 $GM(1, 1)$ 模型,有效解决了 $GM(1, 1)$ 模型白化响应函数初始条件确定的问题。从 $GM(1, 1)$ 模型背景值 $z^{(1)}(k)$ 的几何意义出发,用非齐次指数函数来拟合一次累加生成序列,提出了一种背景值构造的方法,得到一种更为合理的背景值计算公式,使得优化后的模型模拟和预测精度有显著提高,尤其是当发展系数绝对值较大时仍然保持很高的精度。

(5) $GM(1, 1)$ 幂模型。在分析现有灰色 Verhulst 模型存在问题的基础上,根据灰色 Verhulst 模型的白化微分方程的形式,推导出一种新型灰色 Verhulst 模型,使得差分方程的参数与其在微分方程中对应的参数具有更好的一致性。根据灰色系统信息覆盖的基本原理,给出了 $GM(1, 1)$ 幂模型中参数 α 的估计算法,讨论了 α

的不同取值对模型解的性质影响。对其白化微分方程解的定理进行了补充,并给出了白化微分方程解的优化方法,进一步推广了GM(1, 1) 算模型的应用。

(6) 灰色关联决策模型。通过多种不确定性系统理论、方法(概率统计、模糊数学、粗集理论、未确知数学)的比较分析,明确灰色关联度的内涵,寻求各关联因素之间的相似性,而现有的灰色关联度的定义经过不同的数据变换常常不具有保序性,因而,有时会出现决策结果与实际情况不一致的现象,通过多种不确定性系统理论、方法的比较进行综合创新,构造科学、合理的灰色关联决策模型。

(7) 区间数关联分析模型。由于实际中经常遇到的问题属于不确定性问题,不确定性问题的表示大多数是用区间数表示的,因此区间数的关联度就成为关联分析的重要研究问题之一。

(8) 灰色聚类决策分析中聚类系数差异不显著情形下的综合决策方法。在聚类系数差异不显著时,我们利用灰色聚类决策中各对象的聚类系数与各聚类对象应属的灰类之间的内在联系,构造科学、合理的灰色聚类决策模型,解决灰色聚类决策中聚类属性的不确定性问题。

(9) 灰色聚类决策中属于同一灰类的各对象的排序问题。在灰色聚类决策中,由于各对象的聚类系数之间不具有可比性,因而各对象之间的排序问题就成为灰色综合决策模型的关键,在对灰色聚类决策分析系统研究、创新的基础上,对灰色聚类决策分析模型的建模机理进行深入剖析,建立具有排序功能的灰色聚类综合决策模型。

(10) 多指标加权灰靶决策模型。在灰靶决策中,不同的指标在不同的决策中具有不同的作用,因此在灰靶多目标决策中各指标不应等同看待。又由于各指标的量纲不同,对效果样本矩阵不加处理直接建模,从数学的角度来看,它是没有实际意义的,因此在建模前必须对效果样本矩阵进行无量纲化处理,即利用“奖优罚劣”变换算子效果样本矩阵进行无量纲化处理。从而建立多指标加权灰靶决策模型。

(11) 灰色动态综合评价模型。在灰色关联度、灰色聚类分析、灰色聚类排序性研究的基础上,建立具有动态综合评价功能的灰色动态综合评价模型。深入剖析灰色动态综合评价模型的建模机理和模型的评价功能。

(12) 灰色层次综合决策模型。在灰色层次决策中,由于决策是多层次的,在决策中不同的决策层次在决策中的作用是不同的,而同一层次中,不同的决策人员在决策中的作用也是不同的,因此在建立决策模型时,有必要建立灰色层次综合决策评价模型来研究他们在决策中的不同作用。

(13) 多指标区间数关联决策模型。由于在实际中遇到的决策问题多数属于不确定性决策问题,因此在区间数关联度研究的基础上,建立区间数多指标区间数关联决策模型。

(14) 区间数的多指标灰靶决策模型。在灰靶决策模型研究的基础上,建立

具有区间数的多指标灰靶决策模型。

1.4.2 研究方法与技术路线

通过多种不确定性系统理论、方法的比较进行综合创新,从而明确灰色关联分析与灰色聚类分析的灰内涵,构造缓冲算子、 $[-1, 1]$ 线性生成算子及灰色关联度的新定义。同时将传统数学和概率统计、模糊数学、粗集理论、未确知数学等多种不确定性系统的思想方法相结合,构造科学、合理的灰色综合决策模型。对灰色预测与决策模型的建模机理和建模方法进行深入剖析。理论与实际紧密结合,针对实际应用中发现的问题进行理论体系、数学基础和建模机理探索,并及时地将理论、方法上的创新成果应用于实际进行验证。

(1) 充分利用现有研究成果,继承与创新相结合。

(2) 在认真收集、挖掘、整理决策信息和仔细探讨灰色预测与决策机制的基础上,构建灰色预测与决策模型,提炼灰色预测与决策算法。

(3) 灰色预测与决策模型的建立,严格遵循灰色系统的五步建模思想,即思想开发、因素分析、量化、动态化和优化。

(4) 将提出的灰色预测与决策方法尽可能地与实际问题结合起来;验证灰色预测与决策算法的合理性、实用性和有效性。

(5) 认真总结所提出的灰色预测与决策模型的优点及不足,明确存在的问题和下一步研究的方向。

总体研究的技术路线如图 1-1 所示。

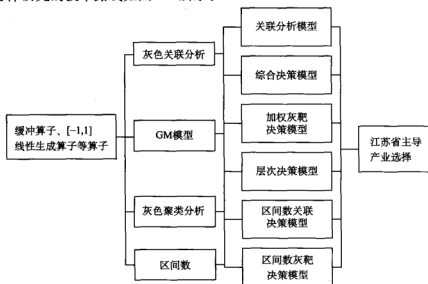


图 1.1 总体研究技术路线

灰色预测与决策模型的研究主要是：针对灰色预测与决策理论在理论体系、数学基础和建模机理及其在实际应用中遇到的实际问题进行探索，力求在理论、方法上进一步开拓创新，巩固我国在灰色系统研究领域中的领先地位，促进不确定性系统预测与决策理论和方法研究的进一步发展。

第2章 缓冲算子及其性质

灰色系统理论重点研究“小样本”、“贫信息”不确定性系统，因此充分开发利用已占有的信息来挖掘系统本身固有的规律是灰色系统理论研究的基本准则。我们可以通过社会、经济、生态等系统的行为特征数据序列来寻求因素之间或因素自身的变化规律。灰色系统理论通过对原始数据的挖掘、整理来寻求其变化规律，这是一种就数据寻找数据的现实规律的途径，称为灰色序列生成。灰色系统理论认为，尽管客观系统表象复杂、数据离乱，但它总是有整体功能的，因此必然蕴含某种内在规律，关键在于如何选择适当的方式去挖掘和利用它。灰色序列生成是灰色系统理论研究的基础，通过对序列算子的作用，能够使常常出现的定量研究结果与定性分析结论不符的问题得到有效的解决。

2.1 缓冲算子的基本概念

定义 2.1.1 设

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

为系统真实行为数据序列，而观测到的系统行为数据序列为

$$\begin{aligned} X &= \{x(1), x(2), \dots, x(n)\} = \{x^{(0)}(1) + \varepsilon_1, x^{(0)}(2) + \varepsilon_2, \dots, x^{(0)}(n) + \varepsilon_n\} \\ &= X^{(0)} + \varepsilon \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ 为冲击扰动项，称 X 为冲击扰动序列。

定义 2.1.2 设系统行为数据序列为 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$,

- (1) 若 $\forall k=2, 3, \dots, n, x(k) - x(k-1) > 0$ ，称 X 为单调增长序列；
- (2) 若 $\forall k=2, 3, \dots, n, x(k) - x(k-1) < 0$ ，称 X 为单调衰减序列；
- (3) 若存在 $k, k' \in \{2, 3, \dots, n\}$ ，有

$$x(k) - x(k-1) > 0, \quad x(k') - x(k'-1) < 0$$

称 X 为振荡序列。

定义 2.1.3 设系统行为数据序列为 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$,

- (1) 令

$$r(k) = \frac{x(n) - x(k)}{n - k + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

称 $r(k)$ 为数据序列 X 中 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均变化率。对于单调增长序列，

$r(k) > 0$, $r(k)$ 为 X 中从 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率; 对于单调衰减序列, $r(k) < 0$, $r(k)$ 为 X 中从 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均衰减率;

(2) 令

$$M = \max\{x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad m = \min\{x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}$$

称 $M-m$ 为振荡序列 X 的振幅。

定义 2.1.4 设 X 为系统行为数据序列, D 为作用于 X 的算子, X 经算子 D 作用后所得数据序列记为

$$XD = \{x(1)d, x(2)d, \dots, x(n)d\}$$

则称 D 为序列算子, 称 XD 为一阶算子作用序列。

序列算子的作用可以进行多次, 相应地, 若 D_1, D_2, D_3 皆为序列算子, 称 $D_1 D_2$ 为二阶算子, 并称

$$XD_1 D_2 = \{x(1)d_1 d_2, x(2)d_1 d_2, \dots, x(n)d_1 d_2\}$$

为二阶算子作用序列。

同理称 $D_1 D_2 D_3$ 为三阶算子, 并称

$$XD_1 D_2 D_3 = \{x(1)d_1 d_2 d_3, x(2)d_1 d_2 d_3, \dots, x(n)d_1 d_2 d_3\}$$

为三阶算子作用序列。

.....

公理 2.1.1 (不动点公理) 设 X 为系统行为数据序列, D 为序列算子, 则 D 满足

$$x(n)d = x(n)$$

不动点公理限定系统行为数据序列在序列算子的作用下, 系统行为数据序列中的最新信息 $x(n)$ 保持不变, 即运用序列算子对系统行为数据进行作用, 不改变最新信息 $x(n)$ 这一既成事实。

根据定性分析的结论, 亦可使 $x(n)$ 以前的若干个数据在序列算子作用下保持不变。例如, 令

$$x(j)d \neq x(j) \quad \text{且} \quad x(i)d = x(i)$$

其中, $j=1, 2, \dots, k-1$; $i=k, k+1, \dots, n$ 。

公理 2.1.2 (信息充分利用公理) 系统行为数据序列 X 中的每一个数据 $x(k), k=1, 2, \dots, n$ 都应充分地参与序列算子作用的整个过程。

信息充分利用公理限定序列算子都应以前有数据序列中的信息为基础进行构造, 不能抛开原始数据序列另搞一套。

公理 2.1.3 (解析化、规范化公理) 任意的 $x(k)d (k=1, 2, \dots, n)$, 皆可由一个统一的 $x(1), x(2), \dots, x(n)$ 的初等解析式表达。

解析化、规范化公理要求由系统行为数据序列得到的序列算子格式规范、统

一旦尽可能的简化,以便于计算出算子的作用序列。

满足上述三公理的序列算子称为缓冲算子, XD 称为缓冲序列。

定义 2.1.5 设 X 为系统行为数据序列, D 为缓冲算子, 当 X 分别为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时:

(1) 若缓冲序列 XD 比原始行为数据序列 X 的增长速度(或衰减速度)减缓或振幅减小, 则称缓冲算子 D 为弱化缓冲算子。

(2) 若缓冲序列 XD 比原始行为数据序列 X 的增长速度(或衰减速度)加快或振幅增大, 则称缓冲算子 D 为强化缓冲算子。

定理 2.1.1 (1) 设 X 为单调增长序列, XD 缓冲序列, D 为弱化缓冲算子, 则

$$D \text{ 为弱化缓冲算子} \Leftrightarrow x(k) \leq x(k)d, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(2) 设 X 为单调衰减序列, XD 缓冲序列, D 为弱化缓冲算子, 则

$$D \text{ 为弱化缓冲算子} \Leftrightarrow x(k) \geq x(k)d, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(3) 设 X 为振荡序列, XD 缓冲序列, D 为弱化缓冲算子, 则

$$\max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\} \geq \max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\}, \quad \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\} \leq \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\}$$

证明 设 X 为单调增长序列, 令

$$r(k) = \frac{x(n) - x(k)}{n - k + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

为原始数据序列 X 中 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率。

$$r(k)d = \frac{x(n)d - x(k)d}{n - k + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

为缓冲序列 XD 中 $x(k)d$ 到 $x(n)d$ 的平均增长率。

由于 $x(n)d = x(n)$, 有

$$r(k) - r(k)d = \frac{[x(n) - x(k)] - [x(n)d - x(k)d]}{n - k + 1} = \frac{x(k)d - x(k)}{n - k + 1}$$

由于 D 是弱化缓冲算子, 则缓冲序列 XD 比原始行为数据序列 X 的增长速度减缓, 即 $r(k) \geq r(k)d$, 也就是 $r(k) - r(k)d \geq 0$, 于是得 $x(k)d - x(k) \geq 0$, 即得 $x(k)d \geq x(k)$, 反之亦然。

同理可证, 当 X 为单调衰减序列、振荡序列时, 上述结论成立。

由定理 2.1.1 可知, 单调增长序列在弱化缓冲算子作用下, 数据膨胀; 单调衰减序列在弱化缓冲算子作用下, 数据萎缩。

定理 2.1.2 (1) 设 X 为单调增长序列, XD 缓冲序列, D 为强化缓冲算子, 则

$$D \text{ 为强化缓冲算子} \Leftrightarrow x(k) \geq x(k)d, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(2) 设 X 为单调衰减序列, XD 缓冲序列, D 为强化缓冲算子, 则

$$D \text{ 为强化缓冲算子} \Leftrightarrow x(k) \leq x(k)d, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(3) 设 X 为振荡序列, XD 缓冲序列, D 为强化缓冲算子, 则

$$\max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\}, \quad \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)\} \geq \min_{1 \leq k \leq n} \{x(k)d\}$$

证明 仿定理 2.1.1 的证明即可。

由定理 2.1.2 可知, 单调增长序列在强化缓冲算子作用下, 数据萎缩; 单调衰减序列在强化算子作用下, 数据膨胀。

2.2 弱化缓冲算子的构造

刘思峰提出了缓冲算子的概念, 并构造出一种得到广泛应用的实用弱化缓冲算子; 谢乃明构造了一种新的弱化缓冲算子。在此基础上, 党耀国构造出若干新的弱化缓冲算子, 并研究了其特性及各种弱化缓冲算子之间的内在关系; 关叶青、魏勇、吴正鹏、崔杰等都在缓冲算子研究方面有重要建树。

首先介绍刘思峰构造的弱化缓冲算子。

设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, 令

$$XD_1 = \{x(1)d_1, x(2)d_1, \dots, x(n)d_1\}$$

其中

$$\begin{aligned} x(k)d_1 &= \frac{1}{n-k+1} [x(k) + x(k+1) + \dots + x(n)] \\ &= \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n x(i), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

则当 X 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时, D_1 皆为弱化缓冲算子。

我们在此称此弱化缓冲算子 D_1 为平均弱化缓冲算子, 并记为 AWBO。并在此基础上构造如下若干其他类型的实用弱化缓冲算子。

定理 2.2.1 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, 即 $x(i) > 0$, 令

$$XD_2 = \{x(1)d_2, x(2)d_2, \dots, x(n)d_2\}$$

其中

$$x(k)d_2 = [x(k) \cdot x(k+1) \cdot \dots \cdot x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}} = \left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{\frac{1}{n-k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_2 皆为弱化缓冲算子。

证明 容易验证, D_2 满足缓冲算子三公理, 因而 D_2 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$\begin{aligned} x(k)d_2 &= [x(k) \cdot x(k+1) \cdot \cdots \cdot x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}} \geq [x(k) \cdot x(k) \cdot \cdots \cdot x(k)]^{\frac{1}{n-k+1}} \\ &= x(k), \quad k=1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_2 为弱化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_2 为弱化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) | k=1, 2, \cdots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) | k=1, 2, \cdots, n\}$$

由于

$$\begin{aligned} x(l)d_2 &= [x(l) \cdot x(l+1) \cdot \cdots \cdot x(n)]^{\frac{1}{n-l+1}} \\ &\leq [x(l) \cdot x(l) \cdot \cdots \cdot x(l)]^{\frac{1}{n-l+1}} = x(l) \\ x(h)d_2 &= [x(h) \cdot x(h+1) \cdot \cdots \cdot x(n)]^{\frac{1}{n-h+1}} \\ &\geq [x(h) \cdot x(h) \cdot \cdots \cdot x(h)]^{\frac{1}{n-h+1}} = x(h) \end{aligned}$$

故 X 为振荡序列时, D_2 为弱化缓冲算子。

称 D_2 为几何平均弱化缓冲算子, 并记为 GAWBO。

定理 2.2.2 设 $X=\{x(1), x(2), \cdots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, D_1 为平均弱化缓冲算子 (AWBO), D_2 为几何平均弱化缓冲算子 (GAWBO), 则

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{\frac{1}{n-k+1}} = x(k)d_2 \leq x(k)d_1 = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n x(i), \quad k=1, 2, \cdots, n$$

所有等式成立当且仅当 $x(1)=x(2)=\cdots=x(n)$, 即数据序列为常数序列。

证明 直接利用算术平均数大于几何平均数的不等式关系, 可知定理结论成立。

定理 2.2.3 设 $X=\{x(1), x(2), \cdots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, 令

$$XD_3 = \{x(1)d_3, x(2)d_3, \cdots, x(n)d_3\}$$

其中

$$\begin{aligned} x(k)d_3 &= \frac{2}{(n+k)(n-k+1)} [kx(k) + (k+1)x(k+1) + \cdots + nx(n)] \\ &= \frac{2}{(n+k)(n-k+1)} \sum_{i=k}^n ix(i), \quad k=1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_3 皆为弱化缓冲算子。

证明 容易验证, D_3 满足缓冲算子三公理, 因而 D_3 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$\begin{aligned} x(k)d_3 &= \frac{2}{(n+k)(n-k+1)} [kx(k) + (k+1)x(k+1) + \cdots + nx(n)] \\ &\geq \frac{2}{(n+k)(n-k+1)} [kx(k) + (k+1)x(k) + \cdots + nx(k)] = x(k) \end{aligned}$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_3 为弱化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_3 为弱化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) | k = 1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) | k = 1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$\begin{aligned} x(l)d_3 &= \frac{2}{(n+l)(n-l+1)} [lx(l) + (l+1)x(l+1) + \cdots + nx(n)] \\ &\leq \frac{2}{(n+l)(n-l+1)} [lx(l) + (l+1)x(l) + \cdots + nx(l)] = x(l) \\ x(h)d_3 &= \frac{2}{(n+h)(n-h+1)} [hx(h) + (h+1)x(h+1) + \cdots + nx(n)] \\ &\geq \frac{2}{(n+h)(n-h+1)} [hx(h) + (h+1)x(h) + \cdots + nx(h)] = x(h) \end{aligned}$$

故 X 为振荡序列时, D_3 为弱化缓冲算子。

有时系统行为数据序列的重要程度还与各时点有关, 假设各时点的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 。

定理 2.2.4 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, 各时点的权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0$, $\omega_n \neq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$), 则

$$XD_4 = (x(1)d_4, x(2)d_4, \dots, x(n)d_4)$$

其中

$$\begin{aligned} x(k)d_4 &= \frac{\omega_k x(k) + \omega_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega_n x(n)}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_4 皆为弱化缓冲算子。

证明 容易验证, D_4 满足缓冲算子三公理, 因而 D_4 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为对任意的 k 有

$$\begin{aligned} x(k)d_4 &= \frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n} [\omega_k x(k) + \omega_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega_n x(n)] \\ &\geq \frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n} [\omega_k x(k) + \omega_{k+1} x(k) + \cdots + \omega_n x(k)] = x(k) \end{aligned}$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_4 为弱化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_4 为弱化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) | k = 1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) | k = 1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$\begin{aligned} x(l)d_4 &= \frac{\omega_l x(l) + \omega_{l+1} x(l+1) + \dots + \omega_n x(n)}{\omega_l + \omega_{l+1} + \dots + \omega_n} \\ &\leq \frac{\omega_l x(l) + \omega_{l+1} x(l) + \dots + \omega_n x(l)}{\omega_l + \omega_{l+1} + \dots + \omega_n} = x(l) \\ x(h)d_4 &= \frac{\omega_h x(h) + \omega_{h+1} x(h+1) + \dots + \omega_n x(n)}{\omega_h + \omega_{h+1} + \dots + \omega_n} \\ &\geq \frac{\omega_h x(h) + \omega_{h+1} x(h) + \dots + \omega_n x(h)}{\omega_h + \omega_{h+1} + \dots + \omega_n} = x(h) \end{aligned}$$

故 X 为振荡序列时, D_4 为弱化缓冲算子。

并称 D_4 为加权平均弱化缓冲算子, 并记为 WAWBO。

推论 2.2.1 设 $\omega = (1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$x(k)d_4 = \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=k}^n x(i) = x(k)d_1$$

即平均弱化缓冲算子 D_1 是加权平均弱化缓冲算子 D_4 的特例。

推论 2.2.2 设 $\omega = (1, 2, \dots, n)$, 即 $\omega_i = i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$x(k)d_4 = \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) = \frac{2}{(n+k)(n-k+1)} \sum_{i=k}^n i x(i) = x(k)d_3$$

即弱化缓冲算子 D_3 是加权平均弱化缓冲算子 D_4 的特例。

定理 2.2.5 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, 各时点的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ 。令

$$XD_5 = \{x(1)d_5, x(2)d_5, \dots, x(n)d_5\}$$

其中

$$\begin{aligned} x(k)d_5 &= [x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdot \dots \cdot x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \dots + \omega_n}} \\ &= \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_5 皆为弱化缓冲算子。

证明 容易验证, D_5 满足缓冲算子三公理, 因而 D_5 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为对任意的 k 有

$$\begin{aligned} x(k)d_5 &= [x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}} = \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \\ &\geq [x(k)^{\omega_k} \cdot x(k)^{\omega_{k+1}} \cdots x(k)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}} = x(k) \end{aligned}$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_5 为弱化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_5 为弱化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) | k = 1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) | k = 1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$\begin{aligned} x(l)d_5 &= [x(l)^{\omega_l} \cdot x(l+1)^{\omega_{l+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_l + \omega_{l+1} + \cdots + \omega_n}} \\ &\leq [x(l)^{\omega_l} \cdot x(l)^{\omega_{l+1}} \cdots x(l)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_l + \omega_{l+1} + \cdots + \omega_n}} = x(l) \\ x(h)d_5 &= [x(h)^{\omega_h} \cdot x(h+1)^{\omega_{h+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_h + \omega_{h+1} + \cdots + \omega_n}} \\ &\geq [x(h)^{\omega_h} \cdot x(h)^{\omega_{h+1}} \cdots x(h)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_h + \omega_{h+1} + \cdots + \omega_n}} = x(h) \end{aligned}$$

故 X 为振荡序列时, D_5 为弱化缓冲算子。

并称 D_5 为加权几何平均弱化缓冲算子, 并记为 WGAWBO。

推论 2.2.3 设 $\omega = (1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i = 1$, 则

$$\begin{aligned} x(k)d_5 &= [x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}} = \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \\ &= [x(k) \cdot x(k+1) \cdots x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}} = x(k)d_2 \end{aligned}$$

即几何平均弱化缓冲算子 D_2 是加权几何平均弱化缓冲算子 D_5 的特例。

2.3 弱化缓冲算子的性质及应用

2.3.1 弱化缓冲算子的性质

本节重点讨论弱化缓冲算子的性质。

定理 2.3.1 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$ 为权向量, 其中 $\omega_k \geq 0$, $\omega_n \neq 0$ 。

若 $\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}$, 即 $\omega_i \omega'_{i-1} \geq \omega_{i-1} \omega'_i$, $i = 2, 3, \dots, n$, 则

(1) 若 X 为单调增长序列时, 有

$$\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \geq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i} \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

即

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \geq \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

(2) X 为单调衰减序列时, 有

$$\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \leq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i} \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

即

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \leq \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

证明 因为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) - \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i) \\ = & \omega'_k \omega_k x(k) + \omega'_k \omega_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega'_k \omega_n x(n) \\ & + \omega'_{k+1} \omega_k x(k) + \omega'_{k+1} \omega_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega'_{k+1} \omega_n x(n) + \cdots \\ & + \omega'_n \omega_k x(k) + \omega'_n \omega_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega'_n \omega_n x(n) \\ & - [\omega_k \omega'_k x(k) + \omega_k \omega'_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega_k \omega'_n x(n) \\ & + \omega_{k+1} \omega'_k x(k) + \omega_{k+1} \omega'_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega_{k+1} \omega'_n x(n) + \cdots \\ & + \omega_n \omega'_k x(k) + \omega_n \omega'_{k+1} x(k+1) + \cdots + \omega_n \omega'_n x(n)] \\ = & (1, 1, \cdots, 1) \begin{bmatrix} \omega'_k \omega_k & \omega'_k \omega_{k+1} & \cdots & \omega'_k \omega_n \\ \omega'_{k+1} \omega_k & \omega'_{k+1} \omega_{k+1} & \cdots & \omega'_{k+1} \omega_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega'_n \omega_k & \omega'_n \omega_{k+1} & \cdots & \omega'_n \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} \\ & - (1, 1, \cdots, 1) \begin{bmatrix} \omega_k \omega'_k & \omega_k \omega'_{k+1} & \cdots & \omega_k \omega'_n \\ \omega_{k+1} \omega'_k & \omega_{k+1} \omega'_{k+1} & \cdots & \omega_{k+1} \omega'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_n \omega'_k & \omega_n \omega'_{k+1} & \cdots & \omega_n \omega'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} \\ = & (1, 1, \cdots, 1) \begin{bmatrix} \omega'_k \omega_k - \omega_k \omega'_k & \omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1} & \cdots & \omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n \\ \omega'_{k+1} \omega_k - \omega_{k+1} \omega'_k & \omega'_{k+1} \omega_{k+1} - \omega_{k+1} \omega'_{k+1} & \cdots & \omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega'_n \omega_k - \omega_n \omega'_k & \omega'_n \omega_{k+1} - \omega_n \omega'_{k+1} & \cdots & \omega'_n \omega_n - \omega_n \omega'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1, 1, \dots, 1) \begin{bmatrix} 0 & \omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1} & \cdots & \omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n \\ -(\omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1}) & 0 & \cdots & \omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n) & -(\omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n) & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=k}^n [(\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j) x(j) - (\omega'_j \omega_i - \omega_j \omega'_i) x(i)] \\
&= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=k}^n [(\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j) (x(j) - x(i))] \\
&\quad \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n
\end{aligned}$$

所以

$$\omega_j \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_{j-1}} \cdot \omega_{j-1}, \quad \omega_{j-1} \geq \frac{\omega'_{j-1}}{\omega'_{j-2}} \cdot \omega_{j-2}$$

故

$$\omega_j \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_{j-2}} \cdot \omega_{j-2} \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_{j-3}} \cdot \omega_{j-3} \geq \dots$$

因此

$$\omega_j \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_i} \cdot \omega_i, \quad j > i$$

得

$$\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j \geq 0, \quad j > i$$

因此 (1) 当 X 为单调增长序列时, $x(j) - x(i) \geq 0, j > i$, 所以

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) - \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i) \geq 0$$

故

$$\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \geq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i} \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

(2) 当 X 为单调衰减序列时, $x(j) - x(i) \leq 0, j > i$, 所以

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) - \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i) \leq 0$$

故

$$\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \leq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i} \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

从定理 2.3.1 的证明还可以看出:

令

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1} & \cdots & \omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n \\ -(\omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1}) & 0 & \cdots & \omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n) & -(\omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n) & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则矩阵 A 为反对称矩阵, 并且主对角线以上的因素都大于或等于 0。

引理 2.3.1 设 f 为定义在某一简单区间 I 上的一元凸函数, 在 I 上的 n 点 $(x(1), x(2), \dots, x(n))$ 有不等式成立

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x(i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x(i))$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$, 且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, x(1), x(2), \dots, x(n) \in I$ 。

定理 2.3.2 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, D_4 为加权平均弱化缓冲算子 (WAWBO), D_5 为加权几何平均弱化缓冲算子 (WGAWBO), 各时点的权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_n \neq 0, \omega_k \geq 0, k=1, 2, \dots, n$, 则

$$x(k)d_4 = \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} = x(k)d_5, \quad k=1, 2, \dots, n$$

所有等式成立当且仅当 $x(1)=x(2)=\dots=x(n)$, 即数据序列为常数序列。

证明 令 $f(x) = -\lg(x)$, 由于 $f(x) = -\lg(x)$ 在 $I = (0, +\infty)$ 上是严格凸函数。

由引理 2.3.1 知

$$\begin{aligned} -\lg\left(\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}\right) &= \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} [-\lg(\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i})] = -\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \lg(x(i)^{\omega_i}) \\ &= -\sum_{i=k}^n \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \lg(x(i)^{\omega_i}) \leq -\lg\left[\sum_{i=k}^n \frac{x(i)^{\omega_i}}{\sum_{i=k}^n \omega_i}\right] \end{aligned}$$

即

$$\lg\left[\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}\right] \geq \lg\left[\sum_{i=k}^n \frac{\omega_i x(i)}{\sum_{i=k}^n \omega_i}\right]$$

由于 $y = \lg(x)$ 是单调递增函数, 故有

$$\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}$$

由定理 2.3.2 可以看出: 对于对同一数据序列进行弱缓冲算子运算, 对应于同一分量上的生成像, 加权平均弱缓冲算子像大于加权几何平均弱缓冲算子像。

定理 2.3.3 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0$, $\omega_n \neq 0$, $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$ $\omega'_k \geq 0$, $\omega'_n \neq 0$ 为权向量, 若 $\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}$, 即 $\omega_i \omega'_{i-1} \geq \omega_{i-1} \omega'_i$, $i=2, 3, \dots, n$, 则

(1) X 为单调增长序列时, 有

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}$$

(2) X 为单调衰减序列时, 有

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \leq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}$$

证明 因为

$$\begin{aligned} \lg \left[\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \right] &= \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \left[\lg \left(\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right) \right] = \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \lg(x(i)^{\omega_i}) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i \lg(x(i)) \end{aligned}$$

由定理 2.3.1 的证明可知

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i \lg(x(i)) - \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i \lg(x(i)) \\ &= (1, 1, \dots, 1) \begin{bmatrix} 0 & \omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1} & \dots & \omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n \\ -(\omega'_k \omega_{k+1} - \omega_k \omega'_{k+1}) & 0 & \dots & \omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(\omega'_k \omega_n - \omega_k \omega'_n) & -(\omega'_{k+1} \omega_n - \omega_{k+1} \omega'_n) & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lg(x(1)) \\ \lg(x(2)) \\ \vdots \\ \lg(x(n)) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=k}^n [(\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j) \lg(x(j)) - (\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j) \lg(x(i))] \\ &= \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=k}^n [(\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j) (\lg(x(j)) - \lg(x(i)))] \end{aligned}$$

$$\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

所以

$$\omega_j \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_{j-1}} \cdot \omega_{j-1}, \quad \omega_{j-1} \geq \frac{\omega'_{j-1}}{\omega'_{j-2}} \cdot \omega_{j-2}$$

故

$$\omega_j \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_{j-2}} \cdot \omega_{j-2} \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_{j-3}} \cdot \omega_{j-3} \geq \dots$$

因此

$$\omega_j \geq \frac{\omega'_j}{\omega'_i} \cdot \omega_i, \quad j > i$$

得

$$\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j \geq 0, \quad j > i$$

由于

$$\omega'_i \omega_j - \omega_i \omega'_j \geq 0, \quad j > i$$

因此

(1) 当 X 为单调增长序列时,

$$x(j) - x(i) \geq 0, \quad j > i$$

因为 $\lg(x)$ 为严格单调递增函数, 所以有 $\lg x(j) - \lg x(i) \geq 0$

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i \lg(x(i)) - \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i \lg(x(i)) \geq 0$$

所以

$$\lg \left[\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \right] - \lg \left[\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}} \right] \geq 0$$

故

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}$$

(2) 当 X 为单调衰减序列时,

$$x(j) - x(i) \leq 0, \quad j > i$$

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i \lg(x(i)) - \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i \lg(x(i)) \leq 0$$

所以

$$\lg \left[\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \right] - \lg \left[\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}} \right] \leq 0$$

故

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \leq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}$$

定理 2.3.4 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0$, $\omega_n \neq 0$, $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$ $\omega'_k \geq 0$, $\omega'_n \neq 0$ 为权向量, 若 $\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}$, 即 $\omega_i \omega'_{i-1} \geq \omega_{i-1} \omega'_i, i=2, 3, \dots, n$, 则

(1) X 为单调增长序列时, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) &\geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}} \\ \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) &\geq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i} \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i) \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}} \end{aligned}$$

(2) X 为单调衰减序列时, 有

$$\begin{aligned} \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} &\leq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \\ \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} &\leq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i} \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \leq \frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i} \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i) \end{aligned}$$

证明 由定理 2.3.1~定理 2.3.3 可知结论成立。

从以上讨论可知, 单调增长序列在弱缓冲算子作用下, 数据膨胀, 由于在缓冲算子作用时, 必须要满足不动点公理, 即 $x(n)d = x(n)$, 所以弱缓冲算子作用序列的增长速度比原始数据序列的增长速度减缓; 同理, 对于单调衰减序列, 在弱缓冲算子作用下, 数据萎缩, 弱缓冲算子作用序列的衰减速度比原始数据序列的衰减速度减缓。因此当原始数据序列增长(衰减)速度较快时, 利用所构造的弱缓冲算子对原始数据序列进行作用, 将使数据序列变得平缓。因而弱缓冲算子适合于数据序列增长(衰减)速度过快的情形。如果要降低弱化速度, 可以使用加权几何平均弱缓冲算子(WGAWBO); 如果要提高弱化速度, 可以使用加权平均弱缓冲算子(WAWBO); 在同一类算子中, 可通过变换不同时期数据的权重适当调整弱化速度。弱化算子的构造符合“新息优先”的

原则,即最新的信息在缓冲算子作用下保持不变。

2.3.2 弱化缓冲算子的应用

前面分别讨论了弱化缓冲算子的构造与它们之间的性质,我们利用 2.2 节构造的弱化缓冲算子对上海市上网户数进行预测分析。

以上海市 1996~2001 年上网户数(单位:万户)为例来说明弱化缓冲算子在预测过程中的作用。

选取 1996~2001 年上海市上网户数作为原始数据: $X = \{0.33, 0.90, 10.24, 42.24, 88.24, 104.10\}$ 。

从原始数据序列可以发现,上海市上网户数的增长势头很猛,每年均有 1~10 倍的增长率。这是一种超常规的发展,如此高的增长率不可能一直保持下去。因此,用现有数据直接建模预测,预测结果令人难以置信。经过认真分析,发现上海市上网户数的高速增长主要是由于 Internet 刚刚兴起,再加上各级政府信息化政策的推动。因此,要对若干年后上海市上网户数进行预测,就必须考虑这些政策因素的作用。将相关政策出台后上网户数快速增长的作用加到过去的年份中去。基于预测的连贯性和相关性原则,以及灰色系统“新息优先”的建模思想,我们利用平均弱化缓冲算子对原始数据序列 X 进行作用:

对原始数据序列采用一阶平均弱化缓冲算子作用,得到一阶平均弱化缓冲作用序列 $XD = \{41.0085, 49.144, 61.205, 78.193, 96.17, 104.10\}$;对原始数据序列采用二阶平均弱化缓冲算子作用,得到二阶平均弱化缓冲作用序列 $XD^2 = \{71.637, 77.762, 84.917, 92.821, 100.315, 104.10\}$ 。

利用二阶平均弱化缓冲序列 XD^2 对上海市上网户数按 GM(1, 1)模型建模并进行预测,预测模型为

$$\hat{x}^{(1)}(1996+t) = 1040.9309e^{0.073135t} - 969.2939$$

其平均模拟误差为: 1.31%, 并可得 2002~2005 年的上网户数分别为: 113.851, 122.49, 131.784, 141.783。这一结果与实际发展基本吻合。

当原始数据序列增长(衰减)速度较快时,在进行预测时可以先对原始数据序列进行弱化缓冲算子作用,然后再进行建模,它能有效地消除冲击扰动系统数据序列受到的冲击干扰。

2.4 强化缓冲算子的构造

在刘思峰构造的强化缓冲算子工作的基础上,党耀国提出若干个新的强化缓冲算子,并研究了其特性及各种强化缓冲算子之间的内在关系,从而使具有不同特征的增长(衰减)速度过慢的冲击扰动系统数据序列的建模预测问题得

到一定程度解决。

定理 2.4.1 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, 令

$$XD_1 = \{x(1)d_1, x(2)d_1, \dots, x(n)d_1\}$$

其中

$$x(k)d_1 = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{x(k) + x(k+1) + \dots + x(n)} = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n x(i)}$$

$$\sum_{i=k}^n x(i) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_1 皆为强化缓冲算子。

证明 容易验证, D_1 满足缓冲算子三公理, 因而 D_1 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$x(k)d_1 = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{x(k) + x(k+1) + \dots + x(n)} \leq \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{x(k) + x(k) + \dots + x(k)}$$

$$= x(k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_1 为强化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_1 为强化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$x(l)d_1 = \frac{(n-l+1)(x(l))^2}{x(l) + x(l+1) + \dots + x(n)} \geq \frac{x(l) \cdot x(l)}{x(l) + x(l) + \dots + x(l)} = x(l)$$

$$n-l+1$$

同理可证

$$x(h)d_1 = \frac{(n-h+1)(x(h))^2}{x(h) + x(h+1) + \dots + x(n)} \leq x(h)$$

故 X 为振荡序列时, D_1 为强化缓冲算子。

我们称 D_1 为平均强化缓冲算子, 并记为 (ASBO)。

定理 2.4.2 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, 即 $x(i) > 0$, 令

$$XD_2 = \{x(1)d_2, x(2)d_2, \dots, x(n)d_2\}$$

其中

$$x(k)d_2 = \frac{(x(k))^2}{[x(k) \cdot x(k+1) \cdot \dots \cdot x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}}} = \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)\right]^{\frac{1}{n-k+1}}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_2 皆为强化缓冲算子。

证明 容易验证, D_2 满足缓冲算子三公理, 因而 D_2 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$x(k)d_2 = \frac{(x(k))^2}{[x(k) \cdot x(k+1) \cdots x(n)]^{\frac{1}{n-k+1}}} \leq \frac{(x(k))^2}{[x(k) \cdot x(k) \cdots x(k)]^{\frac{1}{n-k+1}}} = x(k), \quad k=1, 2, \dots, n$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_2 为强化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列, D_2 为强化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) \mid k=1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) \mid k=1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$x(l)d_2 = \frac{(x(l))^2}{[x(l) \cdot x(l+1) \cdots x(n)]^{\frac{1}{n-l+1}}} \geq \frac{x(l) \cdot x(l)}{[x(l) \cdot x(l) \cdots x(l)]^{\frac{1}{n-l+1}}} = x(l)$$

同理可证

$$x(h)d_2 = \frac{(x(h))^2}{[x(h) \cdot x(h+1) \cdots x(n)]^{\frac{1}{n-h+1}}} \leq x(h)$$

故 X 为振荡序列时, D_2 为强化缓冲算子。

我们称 D_2 为几何平均强化缓冲算子, 并记为 (GASBO)。

定理 2.4.3 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, 则

$$\frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)\right]^{\frac{1}{n-k+1}}} = x(k)d_2 \geq x(k)d_1 = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n x(i)}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

所有等式成立当且仅当 $x(1) = x(2) = \dots = x(n)$, 即数据序列为常数序列。

证明 直接利用算术平均数大于几何平均数的不等式关系, 可知定理结论成立。

有时系统行为数据序列的重要程度还与各时点有关, 假设各时点的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ 。

定理 2.4.4 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, 各时点的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, 则

$$XD_3 = \{x(1)d_3, x(2)d_3, \dots, x(n)d_3\}$$

其中

$$x(k)d_3 = \frac{(\omega_k + \omega_{k+1} + \dots + \omega_n)(x(k))^2}{\omega_k x(k) + \omega_{k+1} x(k+1) + \dots + \omega_n x(n)}$$

$$= \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)}, \quad k=1, 2, \dots, n$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_3 皆为强化缓冲算子。

证明 容易验证, D_3 满足缓冲算子三公理, 因而 D_3 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为

$$\begin{aligned} x(k)d_3 &= \frac{(\omega_k + \omega_{k+1} + \dots + \omega_n)(x(k))^2}{\omega_k x(k) + \omega_{k+1} x(k+1) + \dots + \omega_n x(n)} \\ &\leq \frac{(\omega_k + \omega_{k+1} + \dots + \omega_n)(x(k))^2}{\omega_k x(k) + \omega_{k+1} x(k) + \dots + \omega_n x(k)} = x(k), \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_3 为强化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_3 为强化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) | k=1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) | k=1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$\begin{aligned} x(l)d_3 &= \frac{(\omega_l + \omega_{l+1} + \dots + \omega_n)(x(l))^2}{\omega_l x(l) + \omega_{l+1} x(l+1) + \dots + \omega_n x(n)} \\ &\geq \frac{(\omega_l + \omega_{l+1} + \dots + \omega_n)(x(l))^2}{\omega_l x(l) + \omega_{l+1} x(l) + \dots + \omega_n x(l)} = x(l) \end{aligned}$$

同理可证

$$x(h)d_3 = \frac{(\omega_h + \omega_{h+1} + \dots + \omega_n)(x(h))^2}{\omega_h x(h) + \omega_{h+1} x(h+1) + \dots + \omega_n x(n)} \leq x(h)$$

故 X 为振荡序列时, D_3 为强化缓冲算子。

我们称 D_3 为加权平均强化缓冲算子, 并记为 (WASBO)。

推论 2.4.1 设 $\omega=(1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i=1$, 则

$$x(k)d_3 = \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n x(i)} = x(k)d_1$$

即平均强化缓冲算子 D_1 是加权平均强化缓冲算子 D_3 的特例。

定理 2.4.5 设 $X=\{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, 各时点的权重向量为 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_k \geq 0$, $\omega_n \neq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$), 则

$$XD_4 = \{x(1)d_4, x(2)d_4, \dots, x(n)d_4\}$$

其中

$$\begin{aligned} x(k)d_4 &= \frac{(x(k))^2}{[x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}}} \\ &= \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

则当 X 为单调增长序列, 单调衰减序列或振荡序列时, D_4 皆为强化缓冲算子。

证明 容易验证, D_4 满足缓冲算子三公理, 因而 D_4 为缓冲算子。

(1) 当 X 为单调增长序列时, 因为对任意的 k 有

$$\begin{aligned} x(k)d_4 &= \frac{(x(k))^2}{[x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}}} \\ &\leq \frac{(x(k))^2}{[x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}}} = x(k) \end{aligned}$$

所以当 X 为单调增长序列时, D_4 为强化缓冲算子。

(2) 同理可证, 当 X 为单调衰减序列时, D_4 皆为强化缓冲算子。

(3) 当 X 为振荡序列时, 设

$$x(l) = \max\{x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad x(h) = \min\{x(k) \mid k = 1, 2, \dots, n\}$$

由于

$$\begin{aligned} x(l)d_4 &= \frac{(x(l))^2}{[x(l)^{\omega_l} \cdot x(l+1)^{\omega_{l+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_l + \omega_{l+1} + \cdots + \omega_n}}} \\ &\geq \frac{(x(l))^2}{[x(l)^{\omega_l} \cdot x(l)^{\omega_{l+1}} \cdots x(l)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_l + \omega_{l+1} + \cdots + \omega_n}}} = x(l) \end{aligned}$$

同理可证

$$x(h)d_4 = \frac{(x(h))^2}{[x(h)^{\omega_h} \cdot x(h+1)^{\omega_{h+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_h + \omega_{h+1} + \cdots + \omega_n}}} \leq x(h)$$

故 X 为振荡序列时, D_4 为强化缓冲算子。

我们称 D_4 为加权几何平均强化缓冲算子, 并记为 (WGABSO)。

推论 2.4.2 设 $\omega = (1, 1, \dots, 1)$, 即 $\omega_i = 1$, 则

$$\begin{aligned} x(k)d_4 &= \frac{(x(k))^2}{[x(k)^{\omega_k} \cdot x(k+1)^{\omega_{k+1}} \cdots x(n)^{\omega_n}]^{\frac{1}{\omega_k + \omega_{k+1} + \cdots + \omega_n}}} \\ &= \frac{(x(k))^2}{[x(k) \cdot x(k) \cdots x(k)]^{\frac{1}{n-k+1}}} = x(k)d_2 \end{aligned}$$

即几何平均缓冲强化算子 (GABSO) 是加权几何平均缓冲强化算子 (WGABSO) 的特例。

2.5 强化缓冲算子的性质与应用

2.5.1 强化缓冲算子的性质

定理 2.5.1 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为非负数据序列, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n)$ 为权向量, 其中 $\omega_k \geq 0, \omega_n \neq 0$.

若 $\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}$, 即 $\omega_i \omega'_{i-1} \geq \omega_{i-1} \omega'_i, i=2, 3, \dots, n$, 则

(1) 若 X 为单调增长序列时, 有

$$\frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} \leq \frac{\sum_{i=k}^n \omega'_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)}$$

即

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \geq \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

(2) X 为单调衰减序列时, 有

$$\frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} \geq \frac{\sum_{i=k}^n \omega'_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)}$$

即

$$\sum_{i=k}^n \omega'_i \sum_{i=k}^n \omega_i x(i) \leq \sum_{i=k}^n \omega_i \sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)$$

证明 证明同弱化缓冲算子的证明类似, 在此不再重复。

定理 2.5.2 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负的系统行为数据序列, D_3 为加权平均强化缓冲算子 (GASBO), D_4 为加权几何平均强化缓冲算子 (WGASBO), 各时点的权重为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_n \neq 0, \omega_k \geq 0, k=1, 2, \dots, n$, 则

$$x(k)d_3 = \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} \leq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i} \right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}} = x(k)d_4, \quad k=1, 2, \dots, n$$

所有等式成立当且仅当 $x(1)=x(2)=\dots=x(n)$, 即数据序列为常数序列。

证明 证明同弱化缓冲算子的证明类似。

由定理 2.5.2 可以看出: 对于对同一序列进行强化缓冲化算子运算, 对应于

同一分量上的生成像加权平均强化缓冲算子 (GASBO) 像小于加权几何平均强化缓冲算子 (WGASBO) 像。

定理 2.5.3 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_k \geq 0, \omega_n \neq 0, \omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n), \omega'_k \geq 0, \omega'_n \neq 0$ 为权向量,

若 $\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}$, 即 $\omega_i \omega'_{i-1} \geq \omega_{i-1} \omega'_i, i=2, 3, \dots, n$, 则

(1) 若 X 为单调增长序列时, 有

$$\frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}} \leq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}}$$

即

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \geq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}$$

(2) X 为单调衰减序列时, 有

$$\frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}} \geq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}}$$

即

$$\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}} \leq \left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}$$

定理 2.5.4 设 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为系统行为数据序列, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_k \geq 0, \omega_n \neq 0, \omega' = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n), \omega'_k \geq 0, \omega'_n \neq 0$ 为权向量, 若 $\frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \geq \frac{\omega'_i}{\omega'_{i-1}}$, 即 $\omega_i \omega'_{i-1} \geq \omega_{i-1} \omega'_i, i=2, 3, \dots, n$, 则

(1) 若 X 为单调增长序列时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} &\leq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}} \leq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}} \\ \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} &\leq \frac{\sum_{i=k}^n \omega'_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)} \leq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}} \end{aligned}$$

(2) X 为单调衰减序列时, 有

$$\frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}} \geq \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega'_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega'_i}}} \geq \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)}$$

$$\frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^{\omega_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=k}^n \omega_i}}} \geq \frac{\sum_{i=k}^n \omega_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega_i x(i)} \geq \frac{\sum_{i=k}^n \omega'_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \omega'_i x(i)}$$

证明 由定理 2.5.1~定理 2.5.3 可知结论成立。

从以上讨论可知, 单调增长序列在强化缓冲算子作用下数据萎缩。由于在缓冲算子作用时, 必须要满足不动点公理, 即 $x(n)d=x(n)$, 所以强化缓冲算子作用序列的增长速度比原始数据序列的增长速度加快; 同理, 单调衰减序列在强化缓冲算子作用下数据膨胀, 强化缓冲算子作用序列的衰减速度比原始数据序列的衰减速度加快。因此当原始数据序列增长(衰减)速度过慢时, 利用所构造的强化缓冲算子对原始数据序列进行作用, 可使数据序列变得陡峭。因而强化缓冲算子适合于数据序列变化过慢的情形。如果要使强化速度快一些, 可使用加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO); 如果想使强化速度慢一些, 可使用加权平均强化缓冲算子(GASBO); 在同一类算子中, 还可以通过调整各时期数据的权重改变强化速度。强化算子也符合“新息优先”原则, 即最新的信息在强化算子作用下保持不变。

2.5.2 强化缓冲算子的应用

南京市农林牧渔总产值数据(1996~1999年)序列(单位:亿元)为

$$X = \{(91.9895, 94.2439, 96.9644, 98.9199)\}$$

X 增长速度十分缓慢, 平均每年的增长率仅为 2.4%, 这与整个国民经济快速增长的大环境是不相适应的, 长期发展下去, 必将导致产业发展不平衡, 影响国民经济的可持续增长, 因此, 从 2000 年开始, 南京市逐步调整农村产业结构, 改变了这种缓慢增长的状况, 为了能够及时准确地把握经济发展趋势, 对经济的发展作科学合理的预测, 必须对缓慢增长的数据加以处理, 使其符合今后的发展趋势, 在此基础上进行合理的预测。应用定理 2.4.1 所给的强化算子进行二阶强化, 得出二阶缓冲序列数据为

$$XD^2 = \{79.5513, 85.5446, 92.1686, 98.9199\}$$

建立 GM(1, 1) 模型为

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} - 0.0720X^{(1)} = 77.1389$$

时间响应式为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = 1150.7003e^{0.0720k} - 1071.1503$$

根据上式, 计算模拟结果并列拟合效果表和预测效果表如下(表 2.1, 表 2.2)。

表 2.1 模拟效果检验表

年份	强化数据 $x^{(0)}(k)$	拟合数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)}$
1997	85.5446	85.9245	0.3799	0.4441%
1998	92.1686	92.3407	-0.8279	0.8886%
1999	98.9199	99.2359	0.3160	0.3195%

表 2.2 预测效果验证表

年份	实际数据 $x^{(0)}(k)$	预测数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)}$
2000	106.3412	106.6460	0.3048	0.2866%
2001	112.2900	114.6094	1.3194	1.1646%

由表 2.1 和表 2.2 可以看出, 应用强化缓冲算子作用后的数据建模能够取得良好的模拟效果和预测效果, 其中 2000 年和 2001 年的预测数据与实际数据对照, 精度都达到 98% 以上。

第3章 灰色预测模型

灰色预测模型是灰色系统理论的重要组成部分,邓聚龙教授基于预测控制的思想建立了灰色控制模型,完成了灰色系统理论的开篇之作。经过20多年的发展,灰色预测理论已经在工业、农业、社会、经济、科技、能源、交通等众多领域得到应用,成功地解决了生产、生活和科学研究中的大量实际问题,灰色预测模型也由最初的数列预测扩展到区间预测、灾变预测、季节灾变预测、波形预测和系统预测等多种类型。在研究系统发展态势时,一般应首先建立反映系统演化趋势的数学模型,进而对系统的整体功能、协调功能以及系统各因素之间的关联关系、因果关系、动态关系进行量化研究。本章在分析经典GM(1,1)模型的基础上,重点讨论离散灰色模型、优化离散灰色模型、近似非齐次指数增长序列离散灰色模型、多变量灰色预测模型等最新成果。

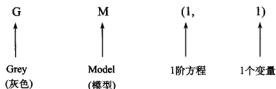
3.1 GM(1,1) 模型

定义 3.1.1 设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$, 则称

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b \quad (3.1.1)$$

为 GM(1,1) 模型的原始形式。

符号 GM(1,1) 的含义如下:



定义 3.1.2 设 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ 如定义 3.1.1 所示,

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\}$$

其中 $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$, $k=2, 3, \dots, n$, 称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (3.1.2)$$

为 GM(1,1) 模型的基本形式。

定理 3.1.1 设 $X^{(0)}$ 为非负序列,

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

其中 $x^{(0)}(k) \geq 0, k=1, 2, \dots, n$; $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1, 2, \dots, n$; $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\}$$

其中 $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k=2, 3, \dots, n$.

若 $\hat{a} = (a, b)^T$ 为参数列, 且

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

则 GM(1, 1) 模型 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的最小二乘估计参数列满足

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

定义 3.1.3 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, $(a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$$

为 GM(1, 1) 模型的白化方程, 也叫影子方程。

定理 3.1.2 设 $B, Y, \hat{a}$ 如定理 3.1.1 所述, $\hat{a} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则

(1) 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的解也称时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-at} + \frac{b}{a} \quad (3.1.4)$$

(2) GM(1, 1) 模型 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (3.1.5)$$

(3) 还原值

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k+1) &= \alpha^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \\ &= (1 - e^a) \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak}, \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

定义 3.1.4 称 GM(1, 1) 模型中的参数 $-a$ 为发展系数, b 为灰色作用量。

$-a$ 反映了 $\hat{x}^{(1)}$ 及 $\hat{x}^{(0)}$ 的发展态势。一般情况下, 系统作用量应是外生的或者前定的, 而 GM(1, 1) 是单序列建模, 只用到系统的行为序列 (或称输出序列、背景值), 而无外作用序列 (或称输入序列、驱动量)。GM(1, 1) 模型中的灰色作用量是从背景值挖掘出来的数据, 它反映数据变化的关系, 其确切内涵是灰的。灰色作用量是内涵外延化的具体体现, 它的存在, 是区别灰色建模与一般输入输出建模 (黑箱建模) 的分水岭, 也是区别灰色系统观点与灰箱观点的重要标志。

例 3.1.1 设有原始数据序列

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4), x^{(0)}(5)\} \\ &= \{2.874, 3.278, 3.337, 3.390, 3.679\} \end{aligned}$$

试用 GM(1, 1) 模型对 $X^{(0)}$ 进行模拟。

解 第一步: 对 $X^{(0)}$ 作 1-AGO, 得

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3), x^{(1)}(4), x^{(1)}(5)\} \\ &= \{2.874, 6.152, 9.489, 12.897, 16.558\} \end{aligned}$$

第二步: 对 $X^{(1)}$ 作紧邻均值生成。令

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1)$$

得

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), z^{(1)}(4), z^{(1)}(5)\} \\ &= \{4.513, 7.820, 11.184, 14.718\} \end{aligned}$$

于是

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ -z^{(1)}(4) & 1 \\ -z^{(1)}(5) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.513 & 1 \\ -7.820 & 1 \\ -11.184 & 1 \\ -14.718 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ x^{(0)}(4) \\ x^{(0)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.278 \\ 3.337 \\ 3.390 \\ 3.679 \end{bmatrix}$$

第三步: 对参数列 $\hat{a} = (a, b)^T$ 进行最小二乘估计。得

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y = B^T Y = \begin{bmatrix} -0.03720 \\ 3.06536 \end{bmatrix}$$

第四步: 确定模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.0372x^{(1)} = 3.06536$$

及时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a} = 85.276151e^{0.0372k} - 82.402151$$

第五步: 求 $X^{(1)}$ 的模拟值

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(1)} &= \{\hat{x}^{(1)}(1), \hat{x}^{(1)}(2), \hat{x}^{(1)}(3), \hat{x}^{(1)}(4), \hat{x}^{(1)}(5)\} \\ &= \{2.8740, 6.1060, 9.4605, 12.9422, 16.5558\}\end{aligned}$$

第六步：还原求出 $X^{(0)}$ 的模拟值。由

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \alpha^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$$

得

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(0)} &= \{\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \hat{x}^{(0)}(3), \hat{x}^{(0)}(4), \hat{x}^{(0)}(5)\} \\ &= \{2.8740, 3.2320, 3.3545, 3.4817, 3.6136\}\end{aligned}$$

第七步：检验误差。由表 3.1 可算出残差平方和

$$s = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon(2), \varepsilon(3), \varepsilon(4), \varepsilon(5)] \begin{bmatrix} \varepsilon(2) \\ \varepsilon(3) \\ \varepsilon(4) \\ \varepsilon(5) \end{bmatrix} = 0.01511$$

平均相对误差

$$\Delta = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^5 \Delta_k = 1.6025\%$$

表 3.1 误差检验表

序号	实际数据 $x^{(0)}(k)$	模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)}$
2	3.278	3.2300	0.0460	1.40%
3	3.337	3.3545	-0.0175	0.52%
4	3.390	3.4817	-0.0917	2.71%
5	3.679	3.6136	0.0654	1.78%

3.2 离散灰色模型

3.2.1 离散灰色模型的定义

定义 3.2.1 称

$$x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2$$

为离散灰色模型，或称为 GM(1, 1) 模型的离散形式。

定理 3.2.1 设 $X^{(0)}$ 为非负序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

其一次累加生成序列为

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n$;

若 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ 为参数列, 且

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 \\ x^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}$$

则离散模型 $x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2$ 的最小二乘估计参数列满足

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

定理 3.2.2 设 $B, Y, \hat{\beta}$ 如定理 3.2.1 所述, $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则

(1) 取 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$, 则递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k x^{(0)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

或

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k \left(x^{(0)}(1) - \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \right) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

(2) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = a^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

证明 (1) 将求得的 β_1, β_2 代入离散形式, 则

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k+1) &= \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 = \beta_1 (\beta_1 \hat{x}^{(1)}(k-1) + \beta_2) + \beta_2 = \dots \\ &= \beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + (\beta_1^{k-1} + \beta_1^{k-2} + \dots + \beta_1 + 1) \cdot \beta_2 \end{aligned}$$

取 $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$, 则

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k x^{(0)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2$$

(2)

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k+1} \hat{x}^{(0)}(i) - \sum_{i=1}^k \hat{x}^{(0)}(i) = \hat{x}^{(0)}(k+1)$$

3.2.2 离散灰色模型与 GM(1, 1) 模型关系研究

从定理 3.2.1、定理 3.2.2 和 3.1 节的研究, 可以知道 GM(1, 1) 模型和离散灰色模型的构造, 将 $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$ 代入 GM(1, 1) 模型, 有

$$x^{(1)}(k) = \frac{1-0.5a}{1+0.5a}x^{(1)}(k-1) + \frac{b}{1+0.5a}, \quad k=2,3,\dots,n$$

为便于和离散灰色模型比较,可以让上式中 k 从 1 取值,则上式变为

$$x^{(1)}(k+1) = \frac{1-0.5a}{1+0.5a}x^{(1)}(k) + \frac{b}{1+0.5a}, \quad k=1,2,\dots,n-1$$

形式与离散灰色模型完全相同,因此假设有关系式

$$\frac{1-0.5a}{1+0.5a} = \beta_1, \quad \frac{b}{1+0.5a} = \beta_2$$

则有

$$a = \frac{2(1-\beta_1)}{1+\beta_1}, \quad b = \frac{2\beta_2}{1+\beta_1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\beta_2}{1-\beta_1}$$

对应于 GM(1, 1) 模型的解方程,也称时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k=1,2,\dots,n-1 \quad (3.2.1)$$

对应于离散模型的解方程,称离散递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k x^{(0)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, \quad k=1,2,\dots,n-1 \quad (3.2.2)$$

下面来研究两者之间的关系。将式 (3.2.1) 右边进行分离,得

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = x^{(0)}(1)e^{-ak} + \frac{b}{a}(1-e^{-ak}), \quad k=1,2,\dots,n-1 \quad (3.2.3)$$

将 e^{-a} 和 $\beta_1 = \frac{1-0.5a}{1+0.5a}$ 用麦克劳林公式展开,得

$$e^{-a} = 1 - a + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} + o(a^n)$$

$$\beta_1 = \frac{1-0.5a}{1+0.5a} = 1 - a \left(1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{2^2} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{2^n} + o(a^n)\right)$$

$$= 1 - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{a^{n+1}}{2^n} + o(a^{n+1})$$

由于 a 值较小,高次项影响微乎其微,如果只考虑前四项时的情况,则有

$$e^{-a} = 1 - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6}$$

$$\beta_1 = 1 - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{4}$$

令差值 $\Delta = e^{-a} - \beta_1$, 则

$$\Delta = e^{-a} - \beta_1 = -\frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{12}$$

对应于不同的 a 值, $|\Delta|$ 取值见表 3.2。

表 3.2 不同 α 值差值分析表

α 值	-0.1	-0.2	-0.3	-0.5	-0.8	-1
$ \Delta $	0.000083	0.000667	0.00225	0.010417	0.04267	0.08333

因此, 当 α 取值较小时, $\beta_1 \approx e^{-\alpha}$, 用 β_1 代替 $e^{-\alpha}$, 则式 (3.2.3) 变为

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(1)}(k+1) &= x^{(0)}(1) \cdot \beta_1^k + \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \cdot (1-\beta_1^k) \\ &= x^{(0)}(1)\beta_1^k + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, \quad k=1, 2, \dots, n-1\end{aligned}$$

形式与式 (3.2.2) 完全相同。因此离散灰色模型与 GM(1, 1) 模型可以认为是同一模型的不同表达方式, 在 α 取值较小时可以相互替代。

3.2.3 完全指数增长序列预测分析

刘思峰教授在《灰色系统理论及其应用》一书中, 运用完全指数增长序列数据进行模拟实验, 发现 GM(1, 1) 具有一定的适用范围, 当发展系数 $-a$ 较大时, 即使使用完全指数增长序列数据进行模拟, 用于长期预测时仍存在较大的误差。离散灰色模型则能够精确地模拟完全指数序列。

设初始发展数据序列为

$$X^{(0)} = \{ac, ac^2, ac^3, \dots, ac^n\}, \quad c > 0$$

则以后的发展趋势为 $x^{(0)}(k) = ac^k, k=n+1, n+2, \dots$ 。

将 $X^{(0)}$ 进行一次累加生成得

$$X^{(1)} = \left\{ ac, a(c+c^2), a(c+c^2+c^3), \dots, a \sum_{i=1}^n c^i \right\}$$

$$Y = \begin{bmatrix} a(c+c^2) \\ a(c+c^2+c^3) \\ \vdots \\ a \sum_{i=1}^n c^i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ac & 1 \\ a(c+c^2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a \sum_{i=1}^{n-1} c^i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} c \\ ac \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = x^{(0)}(1) \cdot \beta_1^k + \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \cdot (1-\beta_1^k) = ac \cdot c^k + \frac{1-c^k}{1-c} \cdot ac = a \sum_{i=1}^{k+1} c^i$$

还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = a \sum_{i=1}^k c^i - a \sum_{i=1}^{k-1} c^i = ac^k$$

$\hat{x}^{(0)}(k)$ 和 $x^{(0)}(k)$ 完全相等, 因此具有预测无偏性, 而 a 和 c 可以任意取值, 因此只要原数据序列具有近似指数增长规律, 都可以用离散灰色模型进行模拟、预测。分析离散灰色模型和 GM(1, 1) 模型预测结果的不同, 可以知道, GM(1, 1) 模型预测发生偏差的原因在于白化形式中的 e^{-a} 与离散灰色模型中的 β_1 之间存在微小的差异, 在作短期预测或发展系数 $-a$ 较小时, 微差对整个预测模型的影响较小, 所以预测精度较高, 而作长期预测或发展系数 $-a$ 较大时, 微差对整个预测模型的影响急剧增大, 预测精度降低, 有时甚至结果无法接受。

例 3.2.1 设有数据序列

$$X^{(0)} = \{2.23, 8.29, 25.96, 84.88, 271.83\}$$

试建立离散灰色模型。

解 根据定理 3.2.1, 可以求得

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} 3.2141 \\ 3.3162 \end{bmatrix}$$

代入公式 3.2.2, 可得 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 模拟值如表 3.3 所示。

表 3.3 误差检验表

序号	实际数据 $x^{(0)}(k)$	模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)}$
2	8.29	8.25	0.04	0.44%
3	25.96	26.53	-0.57	2.19%
4	84.88	85.26	-0.38	0.45%
5	271.83	274.03	-2.20	0.81%

由表 3.3 可得平均相对误差

$$\Delta = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^5 \Delta_k = 0.97\%$$

3.3 离散灰色模型的拓展与优化

3.2 节所研究的离散灰色模型是以整个数据序列第一个数据保持不变而获得的结果。事实上, 在整个序列中第一个数据是最旧的信息, 以此为基础建立模型与实际情况是有差异的, 为了提高模型的预测精度, 可以根据具体需要选择初始迭代值。比如和 GM(1, 1) 模型一样, 取序列初始点为迭代基准, 或者取中间任意一点、序列终点为迭代基准, 根据不同的迭代初值, 可以建立三种离散灰色模型。

3.3.1 离散灰色模型的三种形式

设系统某行为特征序列的观测值为

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

其一次累加生成序列为

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$$

其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n$ 。

根据不同的迭代基值（即在建模时假定原始值和模拟值相等的序列数据），离散灰色模型可以表示为如下三种形式：

$$(1) \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) \end{cases}$$

其中， $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值， β_1, β_2 为待定参数， $\hat{x}^{(1)}(1)$ 为迭代基值，称该模型为始点固定的离散灰色模型（starting-point fixed discrete grey model, SFDGM）。

$$(2) \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \\ \hat{x}^{(1)}(m) = x^{(1)}(m) = \sum_{i=1}^m x^{(0)}(i), 1 < m < n \end{cases}$$

其中， $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值， β_1, β_2 为待定参数， $\hat{x}^{(1)}(m)$ 为迭代基值，称该模型为中间点固定的离散灰色模型（middle-point fixed discrete grey model, MFDGM）。

$$(3) \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \\ \hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n) = \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i) \end{cases}$$

其中， $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值， β_1, β_2 为待定参数， $\hat{x}^{(1)}(n)$ 为迭代基值，称该模型为终点固定的离散灰色模型（ending-point fixed discrete grey model, EFDGM）。

3.3.2 迭代初始值的影响

对于同一数据序列，运用不同的迭代初始值将获得不同的结果。离散灰色模型过于依赖序列初始值，也不是最优的模型，序列初始值的微小变动可能造成模拟序列的较大变化，这对预测是十分不利的。

这里主要讨论 SFDGM。在 SFDGM 中，迭代基值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ ，这样拟合得到的曲线在坐标平面上必然通过点 $(1, x^{(0)}(1))$ ，而根据最小二乘原理，最优拟合曲线不一定要通过迭代基值点 $(1, x^{(0)}(1))$ ，因此我们将 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 作为初始条件的理论依据并不存在，直观地，可以通

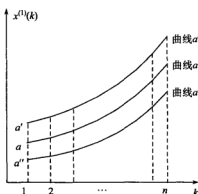


图 3.1 始点固定模型分析

过图 3.1 进行分析。

假设曲线 a 是符合最小二乘原理的曲线, 那么曲线 a 也将通过迭代基值点 a , 即 $(1, x^{(0)}(1))$, 而事实上 $\hat{x}^{(1)}(1)$ 可能大于 $x^{(0)}(1)$ 也可能小于 $x^{(0)}(1)$, 即当真实数据 $x^{(0)}(1)=a'$ 时, 我们拟合得到的曲线为曲线 a' , 而当真实数据 $x^{(0)}(1)=a''$ 时, 我们所求得的曲线为曲线 a'' 。都偏离了曲线 a 。可以证明, 由于 SFDGM 的递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, \quad k=1, 2, \dots, n-1$$

其还原值为

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k+1) &= \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \\ &= \left(\beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right) - \left(\beta_1^{k-1} \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right) \\ &= (\beta_1^k - \beta_1^{k-1}) \cdot \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{\beta_1^{k-1} - \beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \end{aligned}$$

由于 β_1 、 β_2 可以通过最小二乘方法唯一确定, 因此, $\beta_1^k - \beta_1^{k-1}$ 和 $\frac{\beta_1^{k-1} - \beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2$ 两项是唯一确定的, 所以当 $x^{(1)}(1)$ 不在最小二乘原理的拟合曲线上时, 即 $\hat{x}^{(1)}(1) > x^{(1)}(1)$ 或 $\hat{x}^{(1)}(1) < x^{(1)}(1)$ 时, 所求得的 $\hat{x}^{(0)}(k+1)$ 也相应地偏大或偏小。类似地, 可以讨论 MFDGM、EFDGM。从图 3.2 和图 3.3 中分别可以看出 MFDGM 的迭代基值 $\hat{x}^{(1)}(m)$ 偏离 $x^{(1)}(m)$, EFDGM 的迭代基值 $\hat{x}^{(1)}(n)$ 偏离 $x^{(1)}(n)$

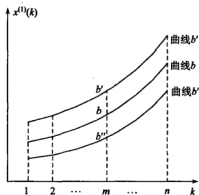


图 3.2 中间点固定模型分析

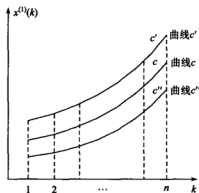


图 3.3 终点固定模型分析

时也同样会影响拟合值 $\hat{x}^{(0)}(k+1)$ 。迭代基值 $\hat{x}^{(1)}(1)$ 、 $\hat{x}^{(1)}(m)$ 和 $\hat{x}^{(1)}(n)$ 的选取会影响整个序列的拟合值, 必须对迭代基值加以修正。

3.3.3 优化离散灰色模型

为了解决迭代初始值对模型拟合值的影响, 考虑给迭代初始值增加一修正项, 通过修正项来反向抵消初始值带来的偏差, 则原离散灰色模型的三种形式变为:

$$(1) \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + \beta_3 \end{cases}$$

其中, $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值, β_1 、 β_2 和 β_3 为待定参数, $\hat{x}^{(1)}(1)$ 为迭代基值, 称该模型为优化始点离散灰色模型 (optimized starting-point discrete grey model, OSDGM)。

$$(2) \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \\ \hat{x}^{(1)}(m) = x^{(1)}(m) + \beta_3 \end{cases}$$

其中, $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值, β_1 、 β_2 和 β_3 为待定参数, $\hat{x}^{(1)}(m)$ 为迭代基值, 称该模型为优化中间点离散灰色模型 (optimized middle-point discrete grey model, OMDGM)。

$$(3) \begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \\ \hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n) + \beta_3 \end{cases}$$

其中, $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值, β_1 、 β_2 和 β_3 为待定参数, $\hat{x}^{(1)}(n)$ 为迭代基值, 称该模型为优化终点离散灰色模型 (optimized ending-point discrete grey model, OEDGM)。

3.3.4 优化离散灰色模型参数求解

优化离散灰色模型中, 有 β_1 、 β_2 和 β_3 三个未知参数, 参数 β_1 、 β_2 的求解和一般的离散灰色模型所使用的方法一样, 采用最小二乘方法, 可得

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1) \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k)}{\sum_{k=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \right)^2} \\ \beta_2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1) - \beta_1 \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \right] \end{cases}$$

以 OSDGM 为例讨论参数 β_3 的求解, OMDGM、OEDGM 可以得到类似结论。按照最小二乘原理, 建立一个无约束优化模型, 求解 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 和 $x^{(1)}(k)$ 误差平方和

最小，也就是求解优化问题

$$\min_{\beta_3} \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2$$

将所求得的 β_1 、 β_2 代入 $\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2$ ，令

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2 \\ &= \beta_3^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right) - x^{(1)}(k+1) \right]^2 \\ &= \beta_3^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\beta_1^k x^{(1)}(1) + \beta_1^k \cdot \beta_3 + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 - x^{(1)}(k+1) \right]^2 \end{aligned}$$

有

$$\frac{dS}{d\beta_3} = 2\beta_3 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \left[\beta_1^k x^{(1)}(1) + \beta_1^k \cdot \beta_3 + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 - x^{(1)}(k+1) \right] \cdot \beta_1^k = 0$$

可以解得

$$\beta_3 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left[x^{(1)}(k+1) - \beta_1^k x^{(1)}(1) - \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right] \cdot \beta_1^k}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_1^k)^2}$$

从而

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1)x^{(1)}(k) - \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1) \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k)}{\sum_{k=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \right)^2} \\ \beta_2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1) - \beta_1 \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \right] \\ \beta_3 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left[x^{(1)}(k+1) - \beta_1^k x^{(1)}(1) - \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right] \cdot \beta_1^k}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_1^k)^2} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

显然，优化后的 OSDGM、OMDGM 和 OEDGM 都能与最优的拟合曲线重合，对于同一数据序列，三个不同的模型可以获得相同的模拟和预测效果，因此，在模拟和预测时可以任意选取其中的一个建立模型。

3.3.5 优化离散灰色模型的递推函数

通过求解参数 β_1 、 β_2 和 β_3 的值, 我们可以给出模拟和预测序列的求解公式, 也称为优化离散灰色模型的递推函数。

定理 3.3.1 对于 OSDGM, 参数值如式 (3.3.1) 所述, 则

(1) 递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k x^{(0)}(1) + \beta_1^k \cdot \beta_3 + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, \quad k=1,2,\dots,n-1$$

或

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k \left(x^{(0)}(1) + \beta_3 - \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \right) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}, \quad k=1,2,\dots,n-1$$

(2) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = a^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k=1,2,\dots,n-1$$

证明 (1) 将求得的 β_1 , β_2 代入离散形式, 则

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k+1) &= \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 = \beta_1 (\beta_1 \hat{x}^{(1)}(k-1) + \beta_2) + \beta_2 = \dots \\ &= \beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + (\beta_1^{k-1} + \beta_1^{k-2} + \dots + \beta_1 + 1) \cdot \beta_2 \end{aligned}$$

取 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + \beta_3 = x^{(0)}(1) + \beta_3$, 则

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k+1) &= \beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 = \beta_1^k (x^{(1)}(1) + \beta_3) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \\ &= \beta_1^k x^{(0)}(1) + \beta_1^k \cdot \beta_3 + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \end{aligned}$$

得证。

$$(2) \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k+1} \hat{x}^{(0)}(i) - \sum_{i=1}^k \hat{x}^{(0)}(i) = \hat{x}^{(0)}(k+1)$$

得证。

定理 3.3.2 对于 OMDGM, 参数值如式 (3.3.1) 所述, 则

(1) 递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \beta_1^{k-m} \left(x^{(1)}(m) + \beta_3 - \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \right) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}, \quad k=1,2,\dots, 1 \leq m \leq n$$

(2) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = a^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k=1,2,\dots$$

证明 与定理 3.3.1 类似, 省略。

定理 3.3.3 对于 OEDGM, 参数值如式 (3.3.1) 所述, 则

(1) 递推函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \beta_1^{k-n} \left(x^{(1)}(n) + \beta_3 - \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \right) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1}, \quad k=1,2,\dots$$

(2) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \alpha^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k=1, 2, \dots$$

证明 与定理 3.3.1 类似, 省略。

3.4 近似非齐次指数增长离散灰色模型

3.4.1 模型的定义

无论是 GM(1, 1) 模型、离散灰色模型还是优化的离散灰色模型, 建模的基础都是假定原始数据序列服从近似指数增长规律, 即原始序列 $x^{(0)}(k) \approx ac^k$, $k=1, 2, \dots$, 而实际上服从近似指数增长规律的数据序列是十分有限的, 因此需要探索其他数据增长规律的数据序列模型, 下面我们针对非齐次指数增长规律的情况进行研究, 即原始数据序列近似服从 $x^{(0)}(k) \approx ac^k + b$, $k=1, 2, \dots$ 。

定义 3.4.1 对原始数据序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

其一次累加生成序列为

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$$

则

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2 \cdot k + \beta_3 \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + \beta_4 \end{cases}$$

称为近似非齐次指数增长规律的离散灰色模型 (non-homogenous discrete grey model, NDGM), 其中 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 是原始序列数据的拟合值, β_1 、 β_2 、 β_3 和 β_4 为待定参数, $\hat{x}^{(1)}(1)$ 为迭代基值。

3.4.2 模型参数的求解

与优化离散灰色模型类似, 参数值 β_1 、 β_2 和 β_3 用最小二乘法求解, 而 β_4 用无约束优化模型求解, 若 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ 为参数列, 且

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 & 1 \\ x^{(1)}(2) & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

则根据最小二乘原理, 参数列应满足

$$\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

可以求得参数的表达式为

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T \\
 &= \frac{1}{(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^2 - (n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \right)^2} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k)x^{(1)}(i)(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)(k+1) \\
 - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k)x^{(1)}(i)(k+1) - (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)(k+1) \\
 \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)x^{(1)}(k+1) + (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \left(x^{(1)}(k) \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(i)(k+1) \\
 - (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)x^{(1)}(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} kx^{(1)}(k+1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \right)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)(k+1) \\
 \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)x^{(1)}(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(i)(k+1) + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)(k+1) \\
 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(k) \sum_{i=1}^{n-1} x^{(1)}(i)x^{(1)}(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{i=1}^{n-1} \left(x^{(1)}(k) \right)^2 \sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(i)(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} kx^{(1)}(k) \right)^2
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

对于 β_k 的求解也是通过建立一个无约束优化模型, 求解 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 和 $x^{(1)}(k)$ 误差平方和最小, 也就是求解优化问题

$$\min_{\beta_k} \sum_{k=1}^n [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2$$

求得 β_k 的值为

$$\beta_k = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left[x^{(1)}(k+1) - \beta_1^k x^{(1)}(1) - \beta_2 \sum_{j=1}^k j \beta_1^{k-j} - \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_3 \right] \cdot \beta_1^k}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_1^k)^2}$$

3.4.3 完全非齐次指数序列验证

与 SFDGM 一样, 下面我们用完全非齐次指数序列数据来验证 NFDGM 的模拟和预测效果。设初始发展数据序列为

$$X^{(0)} = \{ac + b, ac^2 + b, ac^3 + b, \dots, ac^n + b\}, \quad c > 0$$

则以后的发展趋势为 $x^{(0)}(k) = ac^k + b, k = n+1, n+2, \dots$ 。

将 $X^{(0)}$ 进行一次累加生成得

$$X^{(1)} = \{ac + b, a(c + c^2) + 2b, a(c + c^2 + c^3) + 3b, \dots, a \sum_{i=1}^n c^i + nb\}$$

$$Y = \begin{bmatrix} a(c + c^2) + 2b \\ a(c + c^2 + c^3) + 3b \\ \vdots \\ a \sum_{i=1}^n c^i + nb \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} ac + b & 1 & 1 \\ a(c + c^2) + 2b & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a \sum_{i=1}^{n-1} c^i + (n-1)b & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

求得

$$\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} c \\ b(1-c) \\ ac + b \end{bmatrix}, \quad \beta_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k+1) &= \beta_1^k (x^{(1)}(1) + \beta_4) + \beta_2 \sum_{j=1}^k j \beta_1^{k-j} + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_3 \\ &= c^k (ac + b) + b(1-c) \sum_{j=1}^k j c^{k-j} + \frac{1-c^k}{1-c} \cdot (ac + b) \\ &= a \sum_{i=1}^{k+1} c^i + (k+1)b \end{aligned}$$

还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = a \sum_{i=1}^k c^i + kb - a \sum_{i=1}^{k-1} c^i - (k-1)b = ac^k + b$$

$\hat{x}^{(0)}(k)$ 和 $x^{(0)}(k)$ 完全相等, 因此具有模拟和预测无偏性, 而 a 、 b 和 c 可以任意取值, 因此只要原数据序列具有近似非齐次指数增长规律, 都可以用 NDGM 来模拟和预测。

3.5 多变量灰色预测模型

本节立足于构建多变量离散形式的灰色模型, 并将该模型与传统多变量高阶灰色模型 GM(n, h) 模型进行比较。

定义 3.5.1 设原始数据序列 $X_i^{(0)} = \{x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(m)\}$, 有一次累加生成序列

$$X_i^{(1)} = \{x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(m)\}, \quad x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j)$$

均值生成序列

$$Z_i^{(1)} = \{z_i^{(1)}(2), z_i^{(1)}(3), \dots, z_i^{(1)}(m)\}$$

其中 $z_i^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x_i^{(1)}(k) + x_i^{(1)}(k-1))$, $k=2, 3, \dots, m$, 则称

$$\alpha^{(n)} x_1^{(1)}(k) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha^{(n-i)} x_1^{(1)}(k) + a_n z_1^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^{h-1} b_j x_{j+1}^{(1)}(k) + b_h$$

为 GM(n, h) 模型, 称 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_h$ 为 GM(n, h) 模型的参数序列, 记为向量形式

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_h)^T$$

定义 3.5.2 设原始数据序列 $X_i^{(0)}$, 有一次累加生成序列 $X_i^{(1)}$, 称

$$x_1^{(1)}(k) + \alpha_1 x_1^{(1)}(k-1) + \alpha_2 x_1^{(1)}(k-2) + \dots + \alpha_n x_1^{(1)}(k-n) = \sum_{i=1}^{h-1} \beta_i x_{i+1}^{(1)}(k) + \beta_h$$

为多变量离散灰色模型, 记为 DGM(n, h) (discrete grey model of n order h variables)。

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h$ 为 DGM(n, h) 模型的参数。

命题 3.5.1 $\alpha^{(r)} x_1^{(1)}(k) = \sum_{i=0}^r C_r(-1)^i x_1^{(1)}(k-i), i=1, 2, \dots, n$ 。

证明 根据累减生成公式, 可得

$$\alpha^{(1)} x_1^{(1)}(k) = x_1^{(1)}(k) - x_1^{(1)}(k-1) = \sum_{i=0}^1 C_1^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i)$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{(2)} x_1^{(1)}(k) &= \alpha^{(1)} x_1^{(1)}(k) - \alpha^{(1)} x_1^{(1)}(k-1) \\
&= [x_1^{(1)}(k) - x_1^{(1)}(k-1)] - [x_1^{(1)}(k-1) - x_1^{(1)}(k-2)] \\
&= x_1^{(1)}(k) - 2x_1^{(1)}(k-1) + x_1^{(1)}(k-2) \\
&= \sum_{i=0}^2 C_2^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i)
\end{aligned}$$

利用数学归纳法证明, 假设当 $r=j$ 时本命题成立, 即

$$\alpha^{(j)} x_1^{(1)}(k) = \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i)$$

则当 $r=j+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\alpha^{(j+1)} x_1^{(1)}(k) &= \alpha^{(j)} x_1^{(1)}(k) - \alpha^{(j)} x_1^{(1)}(k-1) \\
&= \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i) - \sum_{i=0}^j C_j^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-1-i) \\
&= C_j^0 x_1^{(1)}(k) + [C_j^1 (-1)^1 x_1^{(1)}(k-1) - C_j^0 (-1)^0 x_1^{(1)}(k-1)] \\
&\quad + [C_j^2 (-1)^2 x_1^{(1)}(k-2) - C_j^1 (-1)^1 x_1^{(1)}(k-2)] \\
&\quad + \cdots + [C_j^j (-1)^j x_1^{(1)}(k-j) - C_j^{j-1} (-1)^{j-1} x_1^{(1)}(k-j)] \\
&\quad - C_j^j (-1)^j x_1^{(1)}(k-1-j)
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
C_j^0 + C_j^{j-1} &= \frac{j!}{p!(j-p)!} + \frac{j!}{(p-1)!(j-p+1)!} \\
&= \frac{j!}{(p-1)!(j-p)!} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{j-p+1} \right) \\
&= \frac{(j+1)!}{p!(j+1-p)!} \\
&= C_{j+1}^p
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
\alpha^{(j+1)} x_1^{(1)}(k) &= C_{j+1}^0 x_1^{(1)}(k) + C_{j+1}^1 (-1)^1 x_1^{(1)}(k-1) + C_{j+1}^2 (-1)^2 x_1^{(1)}(k-2) \\
&\quad + \cdots + C_{j+1}^{j+1} (-1)^{j+1} x_1^{(1)}(k-j-1) \\
&= \sum_{i=0}^{j+1} C_{j+1}^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i)
\end{aligned}$$

命题得证。

命题 3.5.2 通过系数变换, $GM(n, h)$ 模型和 $DGM(n, h)$ 模型相互等价。

证明 将命题 3.5.1 所得结论代入 $GM(n, h)$ 模型, 可得

$$\sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i) + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i) + a_2 \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i) \\ + \cdots + a_{n-1} \sum_{i=0}^1 C_1^i (-1)^i x_1^{(1)}(k-i) + a_n z_1^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^{h-1} b_j x_{j+1}^{(1)}(k) + b_h$$

对等式左边合并同类项, 可得

$$(C_n^0 + a_1 C_{n-1}^0 + a_2 C_{n-2}^0 + \cdots + a_{n-1} C_1^0) (-1)^0 x_1^{(1)}(k) \\ + (C_n^1 + a_1 C_{n-1}^1 + a_2 C_{n-2}^1 + \cdots + a_{n-1} C_1^1) (-1)^1 x_1^{(1)}(k-1) \\ + (C_n^2 + a_1 C_{n-1}^2 + a_2 C_{n-2}^2 + \cdots + a_{n-2} C_2^2) (-1)^2 x_1^{(1)}(k-2) \\ + \cdots + (C_n^{n-1} + a_1 C_{n-1}^{n-1}) (-1)^{n-1} x_1^{(1)}(k-n+1) + C_n^n (-1)^n x_1^{(1)}(k-n) \\ + a_n (0.5 x_1^{(1)}(k) + 0.5 x_1^{(1)}(k-1)) \\ = \sum_{j=1}^{h-1} b_j x_{j+1}^{(1)}(k) + b_h$$

记 $\alpha_0 = (C_n^0 + a_1 C_{n-1}^0 + a_2 C_{n-2}^0 + \cdots + a_{n-1} C_1^0) (-1)^0 + 0.5 a_n$, 将等式两边同除以 α_0 , 令

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0} [(C_n^1 + a_1 C_{n-1}^1 + a_2 C_{n-2}^1 + \cdots + a_{n-1} C_1^1) (-1)^1 + 0.5 a_n] \\ \alpha_p = \frac{1}{\alpha_0} (C_n^p + a_1 C_{n-1}^p + a_2 C_{n-2}^p + \cdots + a_{n-1} C_1^p) (-1)^p, \quad p = 2, 3, \cdots, n \\ \beta_j = \frac{b_j}{\alpha_0}, \quad j = 1, 2, \cdots, h$$

则上述等式变为

$$x_1^{(1)}(k) + \alpha_1 x_1^{(1)}(k-1) + \alpha_2 x_1^{(1)}(k-2) + \cdots + \alpha_n x_1^{(1)}(k-n) = \sum_{j=1}^{h-1} \beta_j x_{j+1}^{(1)}(k) + \beta_h$$

形式与 DGM(n, h) 模型完全相同, 命题得证。

特殊地, 当 $n=1, h=1$ 时, GM(n, h) 模型变为 GM(1, 1) 模型, 而 DGM(n, h) 模型即变成一般的离散灰色模型。

第4章 GM(1, 1) 模型的优化

在实际应用与理论研究过程中,人们对 GM(1, 1) 模型进行了诸多改进。按照改进对象来划分,主要有两大类:一是对灰色微分方程的背景值优化;二是对 GM(1, 1) 模型白化微分方程的响应式的优化。

4.1 GM(1, 1) 模型背景值的优化

谭冠军(2000)从背景值 $z^{(1)}(k)$ 的几何意义出发,首次提出 GM(1, 1) 模型的背景值优化,给出一个新的背景值计算公式,提高了模型精度,并且能较好地适应非等间距序列建模。目前,国内外对于背景值的优化,主要是把背景值中的一次累加生成序列进行均值生成改为线性插值生成,即用 $z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha)x^{(1)}(k)$ 代替原来的均值计算公式。而罗党等(2003)给出一种背景值优化的新方式,即用齐次指数函数来拟合一次累加生成序列,提出了一种背景值构造的方法,获得了较高的预测精度。但是,从 GM(1, 1) 模型白化微分方程解的形式可以看出,一次累加生成序列的指数函数形式是非齐次的,累减还原后是齐次形式,下面我们用非齐次指数函数来拟合一次累加生成序列,并给出一种更为合理的背景值计算公式,优化 GM(1, 1) 模型,通过数据模拟和模型比较表明优化后的模型模拟和预测精度有显著提高,尤其是当发展系数绝对值较大时仍然保持很高的精度,突破了 GM(1, 1) 模型中发展系数 $|a| < 2$ 这个适用范围。

4.1.1 GM(1, 1) 模型背景值误差产生的原因分析

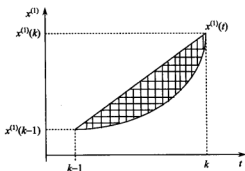


图 4.1 传统的背景值误差来源

由第3章的 GM(1, 1) 模型建立过程可知,对于一次累加生成序列 $X^{(1)}$ 具有灰指数律, GM(1, 1) 模型模拟和预测精度取决于参数 a 和 b , 而参数 a 和 b 的值又依赖于原始数据序列和背景值,因此,背景值构造公式是否合理直接影响模型的模拟和预测精度。传统的背景值计算公式实质上是用梯形公式近似计算 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1, k]$ 上与 t 轴围成的面积,图 4.1 中的阴影部分面积

即传统的背景值计算公式的误差部分。

4.1.2 GM(1, 1) 模型背景值的优化

在区间 $[k-1, k]$ 上对白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 两边求积分

$$\int_{k-1}^k \frac{dx^{(1)}}{dt} dt + a \int_{k-1}^k x^{(1)} dt = b$$

即

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) + a \int_{k-1}^k x^{(1)} dt = b \quad (4.1.1)$$

将灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ 与式 (4.1.1) 比较, 可以看出, 用 $\int_{k-1}^k x^{(1)} dt$ 作为背景值估计得到参数 a 和 b 更能适应白化方程。在这里也可以看到, 传统 GM(1, 1) 模型的误差来源于用 $0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$ 替代 $\int_{k-1}^k x^{(1)} dt$ 。

定理 4.1.1 设原始数据序列 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$, 若 $x^{(0)}$ 为齐次指数形式 $x^{(0)}(k) = ge^{a(k-1)}$, 则 $X^{(1)}$ 满足非齐次指数形式 $x^{(1)}(k) = Ge^{a(k-1)} + C$; 若 $x^{(1)}$ 为非齐次指数形式 $x^{(1)}(k) = Ge^{a(k-1)} + C$, 则 $X^{(0)}$ 满足齐次指数形式 $x^{(0)}(k) = ge^{a(k-1)}$, 其中, $G = g(1 - e^{-a})^{-1}$, $C = -Ge^{-a}$, $k = 1, 2, \dots, n$ 。

证明 若 $x^{(0)}$ 为齐次指数形式 $x^{(0)}(k) = ge^{a(k-1)}$

$$\begin{aligned} x^{(1)}(k) &= \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) = g(1 + e^a + e^{2a} + \dots + e^{a(k-1)}) \\ &= \frac{g(1 - e^{ak})}{1 - e^a} = \frac{ge^{a(k-1)}}{1 - e^{-a}} - \frac{ge^{-a}}{1 - e^{-a}} \end{aligned}$$

令

$$G = g(1 - e^{-a})^{-1}, \quad C = -Ge^{-a}$$

则

$$x^{(1)}(k) = Ge^{a(k-1)} + C$$

若 $x^{(1)}$ 为非齐次指数形式 $x^{(1)}(k) = Ge^{a(k-1)} + C$ 。其累减序列为

$$x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = Ge^{a(k-1)} - Ge^{a(k-2)} = G(1 - e^{-a})e^{a(k-1)} = ge^{a(k-1)}$$

证毕。

定理 4.1.1 说明离散齐次指数函数经一次累加生成后为离散非齐次指数函

数, 离散非齐次指数函数经一次累减生成后为离散齐次指数函数。从 GM(1, 1) 模型白化微分方程解的形式也可以看出, 一次累加生成序列的指数函数形式是非齐次的, 其累减还原后是齐次形式, 为了消除由于背景值而产生的误差, 不妨设

$$x^{(1)}(k) = Ge^{a(k-1)} + C \quad (4.1.2)$$

并且记背景值 $z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt$ 。

将式 (4.1.2) 代入 $z^{(1)}(k)$ 得

$$\begin{aligned} z^{(1)}(k) &= X \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = \int_{k-1}^k [Ge^{a(t-1)} + C] dt \\ &= \frac{1}{a} [Ge^{a(k-1)} - Ge^{a(k-2)}] + C \\ &= \frac{1}{a} [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + C \\ &= \frac{x^{(0)}(k)}{a} + C \end{aligned}$$

由于

$$\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} = \frac{Ge^{a(k-1)}}{Ge^{a(k-2)}} = e^a \quad (4.1.3)$$

所以

$$a = \ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1) \quad (4.1.4)$$

再由定理 4.1.1 可知

$$C = -Ge^{-a} = -g(1 - e^{-a})^{-1}e^{-a} = g(1 - e^a)^{-1} \quad (4.1.5)$$

对于

$$x^{(0)}(k) = ge^{a(k-1)}$$

有

$$g = x^{(0)}(k)e^{-a(k-1)} = x^{(0)}(k)e^{a(1-k)} = x^{(0)}(k) \left[\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right]^{1-k} \quad (4.1.6)$$

再把式 (4.1.3)、式 (4.1.6) 代入式 (4.1.5) 得

$$\begin{aligned} C &= x^{(0)}(k) \left[\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right]^{1-k} \left[1 - \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} \right]^{-1} \\ &= \frac{[x^{(0)}(k)]^{2-k}}{[x^{(0)}(k-1)]^{1-k}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}} \\ &= \frac{[x^{(0)}(k-1)]^{k-1}}{[x^{(0)}(k)]^{k-2}} \cdot \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k)} \end{aligned}$$

$$= \frac{[x^{(0)}(k-1)]^k}{[x^{(0)}(k)]^{k-2} [x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k)]}$$

最后, 将 a 和 C 的表达式代入 $z^{(1)}(k)$ 得新构造的背景值计算公式

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{\ln x^{(0)}(k) - \ln x^{(0)}(k-1)} + \frac{[x^{(0)}(k-1)]^k}{[x^{(0)}(k)]^{k-2} [x^{(0)}(k-1) - x^{(0)}(k)]}$$

其中

$$x^{(0)}(k) \neq x^{(0)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

当 $x^{(0)}(k) = x^{(0)}(k-1)$ 时, 曲线 $x^{(1)}(t)$ 与 t 轴所围成的图形退化为一个矩形, 此时背景值的大小相当于该矩形的面积

$$z^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt = x^{(1)}(k) \cdot [k - (k-1)] = x^{(1)}(k)$$

这一点与原 GM(1, 1) 模型是一致的, $z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)) \rightarrow x^{(1)}(k)$ 。

事实上, 当 $x^{(0)}(k) \rightarrow x^{(0)}(k-1)$ 时, $\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)} = e^a \rightarrow 1$ 即 $a \rightarrow 0$, 这也是原 GM(1, 1) 模型在发展系数 a 绝对值较小时, 模拟及预测精度较高的原因。

4.1.3 利用优化的背景值建模

灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的最小二乘估计参数序列为

$$\hat{a} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-a(t-1)}$$

(2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right) e^{-a(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(3) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = a^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

4.1.4 数据模拟与精度比较

由刘思峰和邓聚龙(2000)的研究可知,一般地,当 $|a| < 2$ 时,传统的GM(1, 1)模型才有意义;当发展系数 $-a \leq 1$ 时,可应用GM(1, 1)模型进行预测,但 $-a$ 的不同取值,预测的效果也不同。在这里,为了验证优化模型的优良特性,我们将 $|a|$ 的取值扩展到大于2的范围,分别取 $-a=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 1.8, 2.0, 2.5, 3.0$ 的情形进行模拟分析。 k 取0, 1, 2, 3, 4, 5时,由 $x_i^{(0)} = e^{-ak}$, 保留小数点后四位,可得如下数列:

- $-a=0.1$ 时, $X_1^{(0)} = \{x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), x_1^{(0)}(4), x_1^{(0)}(5), x_1^{(0)}(6)\}$
 $= \{1, 1.1052, 1.2214, 1.3499, 1.4918, 1.6487\}$
- $-a=0.2$ 时, $X_2^{(0)} = \{1, 1.2214, 1.4918, 1.8221, 2.2255, 2.7183\}$
- $-a=0.3$ 时, $X_3^{(0)} = \{1, 1.3499, 1.8221, 2.4596, 3.3201, 4.4817\}$
- $-a=0.4$ 时, $X_4^{(0)} = \{1, 1.4918, 2.2255, 3.3201, 4.9530, 7.3890\}$
- $-a=0.5$ 时, $X_5^{(0)} = \{1, 1.6487, 2.7183, 4.4817, 7.3890, 12.1825\}$
- $-a=0.6$ 时, $X_6^{(0)} = \{1, 1.8821, 3.3201, 6.0496, 11.0232, 20.0855\}$
- $-a=0.8$ 时, $X_7^{(0)} = \{1, 2.2255, 4.9530, 11.0232, 24.5325, 54.5982\}$
- $-a=1.0$ 时, $X_8^{(0)} = \{1, 2.7183, 7.3890, 20.0855, 54.5982, 148.4132\}$
- $-a=1.5$ 时, $X_9^{(0)} = \{1, 4.4817, 20.0856, 90.0171, 403.4288, 1808.0424\}$
- $-a=1.8$ 时, $X_{10}^{(0)} = \{1, 6.0496, 36.5982, 221.4064, 1339.4308, 8103.0839\}$
- $-a=2.0$ 时, $X_{11}^{(0)} = \{1, 7.3891, 54.5982, 403.4288, 2980.9580, 22026.4658\}$
- $-a=2.5$ 时, $X_{12}^{(0)} = \{1, 12.1825, 148.4132, 1808.0424, 22026.4658, 268337.2865\}$
- $-a=3.0$ 时, $X_{13}^{(0)} = \{1, 20.0856, 403.4288, 8103.0839, 162754.7914, 3269017.3720\}$

分别以 $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_{13}^{(0)}$ 为原始序列建立优化的GM(1, 1)模型, 得优化的GM(1, 1)模型的时间响应式如下:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(1)}(k+1) &= 10.5097212e^{0.099988k} - 9.5097212 \\ \hat{x}_2^{(1)}(k+1) &= 5.5156256e^{0.200025k} - 4.5156256 \\ \hat{x}_3^{(1)}(k+1) &= 3.8580543e^{0.300009k} - 2.8580543 \\ \hat{x}_4^{(1)}(k+1) &= 3.0330539e^{0.400013k} - 2.0330539 \\ \hat{x}_5^{(1)}(k+1) &= 2.5416025e^{0.499994k} - 1.5416025 \\ \hat{x}_6^{(1)}(k+1) &= 2.2164427e^{0.599997k} - 1.2164427 \\ \hat{x}_7^{(1)}(k+1) &= 1.8159689e^{0.800001k} - 0.8159689 \end{aligned}$$

$$\hat{x}_8^{(1)}(k+1)=1.5819740e^{1.000000k}-0.5819740$$

$$\hat{x}_9^{(1)}(k+1)=1.2872387e^{1.500000k}-0.2872387$$

$$\hat{x}_{10}^{(1)}(k+1)=1.1980622e^{1.800000k}-0.1980622$$

$$\hat{x}_{11}^{(1)}(k+1)=1.1563075e^{2.000000k}-0.1563075$$

$$\hat{x}_{12}^{(1)}(k+1)=1.0894104e^{2.500000k}-0.0894104$$

$$\hat{x}_{13}^{(1)}(k+1)=1.0524240e^{3.000000k}-0.0524240$$

记文献(罗党等, 2003)优化的 GM(1, 1) 模型为优化模型 1, 本节所建立的优化模型为优化模型 2。比较原 GM(1, 1) 模型、优化模型 1 和优化模型 2 的模拟误差与预测误差, 分别见表 4.1 和表 4.2。

表 4.1 三种 GM(1, 1) 模型的模拟误差

发展系数 — a	原 GM(1, 1) 模型		优化模型 1		优化模型 2	
	平均绝对 误差	平均相对 误差/%	平均绝对 误差	平均相对 误差/%	平均绝对 误差	平均相对 误差/%
0.1	0.0035	0.1054	0.0044	0.3379	0.000032	0.0023
0.2	0.0099	0.4992	0.0132	0.7323	0.000062	0.0031
0.3	0.0384	1.3009	0.0295	1.1467	0.000031	0.0017
0.4	0.1161	2.6139	0.0584	1.5593	0.000066	0.0013
0.5	0.3068	4.5206	0.1084	1.9562	0.000045	0.0015
0.6	0.8052	7.0743	0.1885	2.0229	0.000166	0.0025
0.8	3.6027	14.1569	0.5852	3.0278	0.000135	0.0010
1.0	14.8072	23.5440	1.6901	3.6332	0.000104	0.0004
1.5	317.8670	51.0331	22.0767	4.7462	0.007874	0.0017
1.8	1632.2404	65.4544	99.6396	5.1330	0.046375	0.0026
2.0	—	—	267.3223	5.2469	0.925802	0.0185
2.5	—	—	3114.5101	5.3270	0.809833	0.0014
3.0	—	—	35010.7100	5.0884	18.504937	0.0027

注: 平均绝对误差 = $\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 |\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i)|$; 平均相对误差 = $\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 \frac{|\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i)|}{x^{(0)}(i)}$ 。

由于 $|a| \geq 2$ 时, 原 GM(1, 1) 模型没有意义, 因此, 没有用它模拟 $|a| \geq 2$ 的情况。由表 4.1 可以看出, 随着发展系数的增大, 原 GM(1, 1) 模型和优化模型 1 的模拟误差都逐渐增加, 原 GM(1, 1) 模型误差增加的速度要明显快于两个优化 GM(1, 1) 模型, 这也说明了两种优化模型的改进效果。优化模型 2 的模拟误差相当小, 它的平均绝对误差和平均相对误差都远远小于前两个模型。随着发展系数的增大, 优化模型 2 的平均绝对误差也有增大的趋势, 但是, 平均相对误差没有明显的增大过程, 对这种现象的解释如下, 由平均相对误差的计算

公式可以看出,当发展系数增大时,分子和分母同时增大,但分子的增大速度要快于分母的增大速度。这体现了优化模型 2 的优良特性,即模拟的相对精度几乎不受发展系数的影响。

由于 $|a| \geq 2$ 时,原 GM(1, 1) 模型没有意义,因此,没有用它预测 $|a| \geq 2$ 的情况。由表 4.2 可以看出,三种模型的 1 步预测精度高于 2 步预测精度,随着发展系数的增大,原 GM(1, 1) 模型和优化模型 1 的预测误差都逐渐增加,而优化模型 2 的 1 步、2 步预测误差都远远小于前两个模型并且相对误差随发展系数的增大而增大,这说明优化模型 2 的预测效果突破了发展系数的限制。

表 4.2 三种 GM(1, 1) 模型的预测误差

发展系数 $-a$	原 GM(1, 1) 模型		优化模型 1		优化模型 2	
	1 步误差/%	2 步误差/%	1 步误差/%	2 步误差/%	1 步误差/%	2 步误差/%
0.1	0.1289	0.1367	0.1333	0.0651	0.0014	0.0057
0.2	0.6960	0.7615	0.4649	0.3762	0.0039	0.0047
0.3	1.9604	2.1791	0.8890	0.8032	0.0003	0.0012
0.4	4.1378	4.6396	1.3448	1.2738	0.0019	0.0028
0.5	7.3970	8.3332	1.7940	1.7400	0.0002	0.0006
0.6	11.8202	13.3390	2.2195	2.1812	0.0008	0.0006
0.8	24.0093	26.9963	2.9772	2.9606	0.0009	0.0010
1.0	39.4369	43.8559	3.6135	3.6070	0.0004	0.0004
1.5	76.6670	81.4556	4.7450	4.7446	0.0017	0.0017
1.8	89.9372	93.0312	5.1325	5.1324	0.0024	0.0024
2.0	—	—	5.2472	5.2472	0.0182	0.0182
2.5	—	—	5.3270	5.3270	0.0014	0.0014
3.0	—	—	5.0883	5.0883	0.0027	0.0027

以上的模拟和预测结果表明新提出的优化模型对纯指数函数具有较高的精度,为说明模型的普遍性,下面对江苏省 1997~2002 年的财政科技投入数据分别用原 GM(1, 1) 模型、优化模型 1 和优化模型 2 建立预测模型,对 2003 和 2004 年的财政科技投入量进行预测,并进行分析比较。江苏省财政科技投入数据见表 4.3。

表 4.3 1997~2004 年江苏省财政科技投入 (单位:亿元)

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
财政科技投入	8.21	9.52	10.51	12.72	14.84	17.89	21.22	26.79

利用 1997~2002 年的财政科技投入数据建立原 GM(1, 1) 模型得时间响应

式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 58.350087e^{-0.164386k} - 50.140087$$

建立优化模型 1 型得时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 60.739665e^{-0.161064k} - 52.529665$$

建立优化模型 2 型得时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 48.367220e^{-0.172675k} - 40.157220$$

它们的累减还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

根据以上三种模型的时间响应式, 得到模拟预测值, 见表 4.4。

表 4.4 三种模型的模拟预测值与实际值的比较 (单位: 亿元)

年份	原 GM(1, 1) 模型		优化模型 1		优化模型 2	
	实际值	模拟预测值	实际值	模拟预测值	实际值	模拟预测值
1998	9.52	10.40	9.52	10.61	9.52	9.12
1999	10.51	12.29	10.51	12.47	10.51	10.83
2000	12.72	14.48	12.72	14.65	12.72	12.88
2001	14.84	17.07	14.84	17.21	14.84	15.30
2002	17.89	20.12	17.89	20.22	17.89	18.19
2003	21.22	23.71	21.22	23.75	21.22	21.62
2004	26.79	27.95	26.79	27.90	26.79	25.69

注: 1998~2002 年为模拟值, 2003、2004 年为预测值。

进一步计算三种模型的模拟误差与预测误差, 分别见表 4.5 和表 4.6。

表 4.5 三种模型对财政科技投入的模拟误差

误差类别	原 GM(1, 1) 模型	优化模型 1	优化模型 2
平均绝对误差/亿元	1.781943	1.936002	0.329244
平均相对误差/%	13.5602	14.8574	2.6696

表 4.6 三种模型对财政科技投入的预测相对误差 (单位: %)

年份	原 GM(1, 1) 模型	优化模型 1	优化模型 2
2003	11.7649	11.9220	1.8661
2004	4.3446	4.1447	4.1054

由表 4.5 可以看到,无论是平均绝对误差,还是平均相对误差,优化模型 2 的误差都要显著地小于原 GM(1, 1) 模型和优化模型 1,这说明优化模型 2 的模拟精度高于其他两种模型,这也是模型有较高预测精度的前提条件;由表 4.6 可以看出,优化模型 2 对 2003 和 2004 年的预测相对误差分别为 1.8661% 和 4.1054%,都小于其他两种模型的误差,特别是一步预测精度要远远高于另外两种模型。从本例中同样可以看出优化模型 2 在模拟、预测方面所具有的优势。

综上所述,可得以下结论:

(1) 离散的齐次指数函数经一次累加生成后为离散非齐次指数,离散非齐次指数经一次累减生成后为离散的齐次指数函数,这对于分析灰色模型误差特性有着重要的作用。

(2) 两种优化的 GM(1, 1) 模型在数据模拟和预测中都比原 GM(1, 1) 模型有较高的精度。优化模型 2 的模拟和预测精度显著地高于优化模型 1,当发展系数较大时,仍然保持很好的模拟和预测效果,突破了 $|a| < 2$ 的限制。

(3) 由模型的模拟和预测精度比较可知,用非齐次指数函数来拟合一次累加生成序列,构造的背景值,显著地改善了传统模型的模拟和预测效果。这也说明,GM(1, 1) 模型的一次累加生成序列满足非齐次指数函数形式。

4.2 GM(1, 1) 模型求解方法的优化

4.1 节讨论了 GM(1, 1) 模型灰色微分方程背景值的优化问题,本节将进一步探讨 GM(1, 1) 模型白化微分方程解的优化问题。

4.2.1 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM(1, 1) 模型

传统的 GM(1, 1) 模型都是以序列 $X^{(1)}$ 的第一个分量 $x^{(1)}(1)$ 作为灰色微分模型的初始条件,这样对新信息利用不够充分,往往会影响到预测的精度。若以 $X^{(1)}$ 的第 n 个分量 $x^{(1)}(n)$ 作为灰色模型的初始条件,新信息会得到充分利用,预测精度大为提高。

定理 4.2.1 设 $B, Y, \hat{a}$ 如引理 3.1.4 所述, $\hat{a} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 取 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件,则

(1) 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left(x^{(1)}(n) - \frac{b}{a} \right) e^{-a(t-n)} + \frac{b}{a} \quad (4.2.1)$$

(2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的时间响应式为

$$x^{(1)}(k) = \left(x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(k-n)} + \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2.2)$$

(3) 还原值 $\hat{x}^{(0)}(k+1) = a^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), k=1, 2, \dots$

证明 (1) $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的通解为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + ce^{-at}, \quad c \text{ 为任意常数} \quad (4.2.3)$$

由于

$$x^{(1)}(t)|_{t=n} = x^{(1)}(n)$$

代入式 (4.2.3) 得

$$\hat{x}^{(1)}(n) = \frac{b}{a} + ce^{-an}$$

故

$$c = \left(x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right)e^{an}$$

得白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的时间相应函数为

$$x^{(1)}(t) = \left(x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(t-n)} + \frac{b}{a}$$

(2) 由 (1) 的证明结果, 令 $t=k$, 得

$$x^{(1)}(k) = \left(x^{(1)}(n) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(k-n)} + \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(3) 由累减还原显然可得。

例 4.2.1 取 $x^{(0)}(k+1) = e^{-k}$ 进行模拟分析。令 $-a=0.3$,

$$X^{(0)} = \{1, 1.34986, 1.82212, 2.45960, 3.32012, 4.48169\}$$

建立新 GM(1, 1) 模型, 得时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 17.291708e^{0.297769(k-5)} + 2.858321$$

由 $\hat{x}^{(0)} = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$ 得

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = 4.45308e^{0.297769(k-5)}$$

观察表 4.7, 可以发现原 GM(1, 1) 模型的平均相对模拟误差为

$$\Delta = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \Delta_k = 1.3\%, \quad \text{新模型的平均相对模拟误差为 } \Delta = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^5 \Delta_k = 0.16\%,$$

新模型的模拟精度比原模型的模拟精度高。

表 4.7 新模型与原 GM(1, 1) 模型模拟误差比较

序号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$		残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$		相对误差 $\Delta_k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)}$	
		原模型	新模型	原模型	新模型	原模型	新模型
1	1.34986	1.33825	1.35326	0.01161	-0.00340	0.86%	0.250%
2	1.82212	1.80243	1.82264	0.01969	-0.00052	1.08%	0.029%
3	2.45960	2.42761	2.45826	0.03199	0.00134	1.30%	0.054%
4	3.32012	3.26963	3.30707	0.05049	0.01305	1.52%	0.393%
5	4.48169	4.40370	4.47837	0.07799	0.00332	1.74%	0.074%

进一步考察预测精度,新模型的预测精度比原模型的预测精度亦有显著的提高。例如,对于 $k=6, 7, 10, 15$ 时,原模型与新模型预测误差如表 4.8 所示。

原 GM(1, 1) 模型的平均相对预测误差为 $\Delta = \frac{1}{4} \sum_k \Delta_k = 2.76\%$, 新 GM(1, 1) 模型的平均相对预测误差为 $\Delta = \frac{1}{4} \sum_k \Delta_k = 1.62\%$, 新模型的预测精度比原模型的预测精度高。

表 4.8 改进的 GM(1, 1) 模型与原 GM(1, 1) 模型预测误差比较

序号	实际数据 $x^{(0)}(k)$	预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$		残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$		相对误差 $\Delta_k = \frac{ \varepsilon(k) }{x^{(0)}(k)}$	
		原模型	新模型	原模型	新模型	原模型	新模型
6	6.04965	5.93112	5.99905	0.13845	0.05059	1.99%	0.83%
7	8.16617	7.98834	8.07983	0.17783	0.08634	2.23%	1.05%
10	20.0855	19.51707	19.74060	0.56843	0.3449	2.91%	1.71%
15	90.0171	86.49915	87.49114	3.51796	2.52595	3.91%	2.80%

4.2.2 GM(1, 1) 模型时间响应函数优化

GM(1, 1) 模型求解的实质就是利用最小二乘法,以指数曲线来拟合原始序列。但是,在确定时间响应函数时,以 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ 为初始条件,这就等于让拟合曲线必须过点 $(1, x^{(0)}(1))$,而这并不一定符合事实,最小二乘的原理并不要求拟合曲线过第一个数据点。刘斌等(2003a)利用 $x^{(1)}(k)$ 的模拟值和原始数据的 1-AGO 序列的差值平方和最小,确定时间响应函数中常数 C ,从而构建了优化的 GM(1, 1) 模型。本节基于最小二乘原理提出了时间响应函数的另一种优化方法,即利用 $x^{(0)}(k)$ 的模拟值和原始数据序列的最小二乘估计方法,确定时间响应函数中常数 C ,从而构建了一种新的优化的 GM 模型。经过

数据模拟和精度比较发现, 与原 GM(1, 1) 模型和其他 GM 模型相比, 该模型的模拟精度和预测精度均有显著的提高。

定理 4.2.2 设 $B, Y, \hat{a}$ 如引理 3.1.4 所述, $\hat{a} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 则

(1) 白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-at}$$

其中 $c = \frac{\sum_{i=1}^n x^{(0)}(i) e^{-ai}}{\sum_{i=1}^n e^{-2ai} (1 - e^a)}$ 。

(2) 灰色微分方程 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b$ 的时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \frac{\sum_{i=1}^n x^{(0)}(i) e^{-ai}}{\sum_{i=1}^n e^{-2ai} (1 - e^a)} \cdot e^{-ak}$$

其中 $k=1, 2, \dots, n$ 。

(3) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = a^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

证明 (1) 因为微分方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 通解为

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-at}$$

其中 c 为待定常数; $\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1)$ 。

确定 c 的方法如下:

首先构造一个原始序列 $X^{(0)}(k)$ 与其模拟值 $\hat{X}^{(0)}(k)$ 的差值平方和函数 $F(c)$,

$$F(c) = \sum_{i=1}^n (\hat{x}^{(0)}(t) - x^{(0)}(t))^2 = \sum_{i=1}^n (c \cdot e^{-at} (1 - e^a) - x^{(0)}(t))^2$$

根据极值的一阶条件: 令 $F'(c) = 0$, 可得

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n x^{(0)}(i) e^{-ai}}{\sum_{i=1}^n e^{-2ai} (1 - e^a)}$$

此时, $F(c)$ 取得最小值。

(2) 由 (1) 的证明结果, 令 $t=k$ 有

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + \frac{\sum_{i=1}^n x^{(0)}(i)e^{-ai}}{\sum_{i=1}^n e^{-2ai}(1-e^a)} \cdot e^{-ak}, \quad k=1,2,\dots,n$$

(3) 将 (2) 证明结果进行累减还原可得。

例 4.2.2 当 $|a| < 2$ 时, GM(1, 1) 模型有意义; 当发展系数 $-a \leq 1$ 时, 可应用 GM(1, 1) 模型进行预测, 但 $-a$ 的不同取值, 预测的效果也不同。在这里, 我们分别取 $-a=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$ 的情形进行模拟分析。 k 取 0, 1, 2, 3, 4, 5 时, 由 $x_i^{(0)} = e^{-ak}$ 可得如下数列:

$$\begin{aligned} -a=0.1 \text{ 时, } X_1^{(0)} &= \{x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), x_1^{(0)}(4), x_1^{(0)}(5), x_1^{(0)}(6)\} \\ &= \{1, 1.1052, 1.2214, 1.3499, 1.4918, 1.6487\} \end{aligned}$$

$$-a=0.2 \text{ 时, } X_2^{(0)} = \{1, 1.2214, 1.4918, 1.8221, 2.2255, 2.7183\}$$

$$-a=0.3 \text{ 时, } X_3^{(0)} = \{1, 1.3499, 1.8221, 2.4596, 3.3201, 4.4817\}$$

$$-a=0.4 \text{ 时, } X_4^{(0)} = \{1, 1.4918, 2.2255, 3.3201, 4.9530, 7.3890\}$$

$$-a=0.5 \text{ 时, } X_5^{(0)} = \{1, 1.6487, 2.7183, 4.4817, 7.3890, 12.1825\}$$

$$-a=0.6 \text{ 时, } X_6^{(0)} = \{1, 1.8821, 3.3201, 6.0496, 11.0232, 20.0855\}$$

$$-a=0.8 \text{ 时, } X_7^{(0)} = \{1, 2.2255, 4.9530, 11.0232, 24.5325, 54.5982\}$$

$$-a=1.0 \text{ 时, } X_8^{(0)} = \{1, 2.7183, 7.3890, 20.0855, 54.5982, 148.4132\}$$

分别以 $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_8^{(0)}$ 为原始序列分别建立优化的 GM(1, 1) 模型, 得优化的 GM(1, 1) 模型的时间响应式:

$$\hat{x}_1^{(1)}(k) = 9.518687e^{0.09992182k} - 9.507443$$

$$\hat{x}_2^{(1)}(k) = 4.54435e^{0.1993401k} - 4.516431$$

$$\hat{x}_3^{(1)}(k) = 2.909197e^{0.297769k} - 2.858321$$

$$\hat{x}_4^{(1)}(k) = 2.112844e^{0.394752k} - 2.033190$$

$$\hat{x}_5^{(1)}(k) = 1.655171e^{0.4898382k} - 1.541474$$

$$\hat{x}_6^{(1)}(k) = 1.369345e^{0.5826263k} - 1.216362$$

$$\hat{x}_7^{(1)}(k) = 1.062181e^{0.7598991k} - 0.8159718$$

$$\hat{x}_8^{(1)}(k) = 0.948039e^{0.9242348k} - 0.5819733$$

由于 GM(1, 1) 模型定义式中 $z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$ 为均值生成, 对于增长序列具有弱化其增长趋势的作用。指数序列建立 GM(1, 1) 发展系数减小。

记刘斌等 (2003b) 优化的 GM(1, 1) 模型为优化模型 2, 本节所建立的优化的 GM(1, 1) 模型为优化模型 3。比较原 GM(1, 1) 模型、优化模型 2 和优化模型 3 的模拟误差与预测误差, 分别见表 4.9 和表 4.10。

表 4.9 三种 GM(1, 1) 模型的模拟误差比较

发展系数 — a	原 GM(1, 1) 模型		优化模型 2		优化模型 3	
	平均绝对 误差	平均相对 误差/%	平均绝对 误差	平均相对 误差/%	平均绝对 误差	平均相对 误差/%
0.1	0.0035	0.104	0.0011	0.080	0.00011	0.009
0.2	0.0099	0.499	0.0055	0.263	0.0015	0.089
0.3	0.0384	1.300	0.0150	0.434	0.0066	0.318
0.4	0.1161	2.613	0.0363	0.714	0.0220	0.693
0.5	0.3068	4.520	0.0818	1.247	0.0590	1.024
0.6	0.8052	8.183	0.1298	1.753	0.1254	1.615
0.8	3.6027	14.157	0.7140	5.709	0.6097	5.246
1.0	14.8072	23.544	2.7102	12.513	2.2291	11.732

注：平均绝对误差 = $\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 |\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i)|$ ；平均相对误差 = $\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 \frac{|\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i)|}{x^{(0)}(i)}$ 。

由表 4.9 可以看出，随着发展系数的增大，三个模型的模拟误差都逐渐增加，但是原 GM(1, 1) 模型误差增加的速度要明显快于两个优化 GM(1, 1) 模型。对于平均绝对误差和平均相对误差，不管发展系数取何值，优化模型 2 的误差都要显著地小于原 GM(1, 1) 模型，而优化模型 3 的误差又都小于优化模型 2 的误差。

表 4.10 三种 GM(1, 1) 模型的预测误差比较

发展系数 — a	原 GM(1, 1) 模型		优化模型 2		优化模型 3	
	1 步误差/%	2 步误差/%	1 步误差/%	2 步误差/%	1 步误差/%	2 步误差/%
0.1	0.129	0.137	0.103	0.110	0.021	0.029
0.2	0.701	0.768	0.461	0.527	0.149	0.215
0.3	1.998	2.226	1.092	1.313	0.436	0.658
0.4	4.317	4.865	1.989	2.502	0.905	1.424
0.5	7.988	9.091	3.142	4.121	1.572	2.568
0.6	13.405	15.392	3.627	5.287	2.713	4.389
0.8	31.595	36.979	8.147	11.758	5.046	8.778
1.0	65.117	78.113	12.733	19.100	8.541	15.214

由表 4.10 可以明显地看到，三个模型的预测误差都随着发展系数的增大而逐渐增加，1 步预测精度高于 2 步预测精度。对于不同的发展系数，优化模型 3 的预测误差小于优化模型 2，优化模型 2 的预测误差小于原 GM(1, 1) 模型。当发展系数大于 0.8 时，1 步预测和 2 步预测精度低于 95%，但高于 90%。这时可以在优化模型的基础上进一步建立残差修正 GM(1, 1) 模型进行预测。

由此可知,对于 GM(1, 1) 模型白化微分方程解法的优化问题。一方面, 可以以 $X^{(1)}$ 的第 n 个分量作为灰色模型的初始条件, 新信息得到充分利用, 预测精度大为提高; 另一方面, 可以以原始序列与其模拟值的差值平方和最小为约束条件, 来确定时间响应函数中的常数 C , 构建了满足原始序列的最优时间响应函数, 使原始信息得到更好的利用, 从而使所建模型的预测精度大为提高。同时上述两种优化方法与 4.1 节的背景值优化联合使用预测精度提高的效果会更加明显。

4.3 无偏灰色模型的递推解法与优化

4.3.1 无偏灰色模型的递推解法

设 $X^{(0)}$ 为非负序列

$$X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

其一次累加序列

$$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$$

其中, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ 。

建立如下三种无偏 GM(1, 1) 模型:

$$(1) [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + a[\lambda, x^{(1)}(k-1) + (1-\lambda_1)x^{(1)}(k)] = b$$

其中, $\lambda_1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{e^a - 1}$ 。

$$(2) \lambda_2 [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + \frac{a}{2} [x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)] = b$$

其中, $\lambda_2 = \frac{a(1+e^{-a})}{2(1-e^{-a})}$ 。

$$(3) \lambda_3 [x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)] + ax^{(1)}(k) = b$$

其中, $\lambda_3 = \frac{a}{e^a - 1}$ 。

已有的三种无偏 GM(1, 1) 模型都可以得到如下时间响应式:

$$x^{(1)}(k) = e^{-a} x^{(1)}(k-1) + \frac{b}{a} (1 - e^{-a}), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (4.3.1)$$

其中, $-a$ 为发展系数, b 为灰色作用量。

再令 $\beta_1 = e^{-a}$, $\beta_2 = \frac{b}{a}(1 - e^{-a})$, 式 (4.3.1) 可以表示为

$$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (4.3.2)$$

在这里, 我们把式 (4.3.2) 称为无偏灰色模型 (UBGM)。模型中的待估

计参数列 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ 可以直接通过最小二乘原理进行估计。

若 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ 为无偏灰色模型的参数向量, 则无偏灰色模型参数的最小二乘估计为

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

$$\text{其中 } Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 \\ x^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

为了避免由差分方程向微分方程的跳跃而导致误差, 下面我们将通过递推的方法直接解出无偏灰色模型的预测公式。

定理 4.3.1 设 $B, Y, \hat{\beta}$ 如上所述, $\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$, 则无偏灰色模型 (UBGM- $x^{(1)}(1)$) 的解为

$$\begin{aligned} (1) \hat{x}^{(1)}(k) &= \begin{cases} \beta_1^{k-1} x^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, & \beta_1 \neq 1 \\ x^{(1)}(1) + k\beta_2, & \beta_1 = 1 \end{cases} \\ (2) \hat{x}^{(0)}(k) &= \begin{cases} (\beta_1 - 1)\beta_1^{k-2} x^{(1)}(1) + \beta_2 \beta_1^{k-2}, & \beta_1 \neq 1 \\ \beta_2, & \beta_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $k=2, 3, \dots, n$ 。

证明 (1) 分别取式 (4.3.2) 中 $k=2, 3, \dots, n$, 有

$$x^{(1)}(2) = \beta_1 x^{(1)}(1) + \beta_2$$

$$x^{(1)}(3) = \beta_1 x^{(1)}(2) + \beta_2$$

.....

$$x^{(1)}(n) = \beta_1 x^{(1)}(n-1) + \beta_2$$

将 $\hat{x}^{(1)}(j-1)$ 依次代入 $\hat{x}^{(1)}(j)$, $j=2, 3, \dots, k$, 可得

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k) &= \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k-1) + \beta_2 \\ &= \beta_1 [\beta_1 \hat{x}^{(1)}(k-2) + \beta_2] + \beta_2 \\ &= \dots \\ &= \beta_1^{k-1} \hat{x}^{(1)}(1) + (\beta_1^{k-1} + \beta_1^{k-2} + \dots + \beta_1 + 1)\beta_2 \end{aligned}$$

$$\text{当 } \beta_1 \neq 1 \text{ 时, } \hat{x}^{(1)}(k) = \beta_1^{k-1} \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1} \cdot \beta_2.$$

$$\text{当 } \beta_1 = 1 \text{ 时, } \hat{x}^{(1)}(k) = \hat{x}^{(1)}(1) + k\beta_2.$$

取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$, 可得 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 的预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} \beta_1^{k-1} x^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, & \beta_1 \neq 1, \\ x^{(1)}(1) + k\beta_2, & \beta_1 = 1, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

(2) 对 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 作一次累减还原:

当 $\beta_1 \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k) &= \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \\ &= \beta_1^{k-1} \hat{x}^{(1)}(1) - \beta_1^{k-2} \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 - \frac{1-\beta_1^{k-2}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \\ &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-2} \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \cdot (\beta_1^{k-2} - \beta_1^{k-1}) \\ &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-2} \hat{x}^{(1)}(1) + \beta_2 \beta_1^{k-2} \end{aligned}$$

当 $\beta_1 = 1$ 时, $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = \beta_2$ 。

取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$, 可得无偏灰色模型的预测公式为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-2} x^{(1)}(1) + \beta_2 \beta_1^{k-2}, & \beta_1 \neq 1, \\ \beta_2, & \beta_1 = 1, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

定理 4.3.2 设 $B, Y, \hat{\beta}$ 如上所述, $\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 若为了体现“新信息优先原理”, 取初始值 $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$, 则无偏灰色模型 (UBGM- $x^{(1)}(n)$) 的解为

$$\begin{aligned} (1) \quad \hat{x}^{(1)}(k) &= \begin{cases} \beta_1^{k-n} x^{(1)}(n) + \frac{1-\beta_1^{k-n}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, & \beta_1 \neq 1 \\ x^{(1)}(n) + (k-n) \beta_2, & \beta_1 = 1 \end{cases} \\ (2) \quad \hat{x}^{(0)}(k) &= \begin{cases} (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1} x^{(1)}(n) + \beta_2 \beta_1^{k-n-1}, & \beta_1 \neq 1 \\ \beta_2, & \beta_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $k=2, 3, \dots, n$ 。

证明 (1) 将式 (4.3.2) 作以下变换:

$$x^{(1)}(k-1) = \frac{1}{\beta_1} (x^{(1)}(k) - \beta_2) \quad (4.3.3)$$

分别取式 (4.3.3) 中 $k=2, 3, \dots, n$, 有

$$x^{(1)}(1) = \frac{1}{\beta_1} (x^{(1)}(2) - \beta_2)$$

$$x^{(1)}(2) = \frac{1}{\beta_1} (x^{(1)}(3) - \beta_2)$$

.....

$$x^{(1)}(n-1) = \frac{1}{\beta_1} (x^{(1)}(n) - \beta_2)$$

将 $\hat{x}^{(1)}(j)$ 依次代入 $\hat{x}^{(1)}(j-1)$, $j=k, k+1, \dots, n$, 可得

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(1)}(k) &= \frac{1}{\beta_1} (\hat{x}^{(1)}(k+1) - \beta_2) \\ &= \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1}{\beta_1} (\hat{x}^{(1)}(k+2) - \beta_2) - \beta_2 \right] \\ &= \dots \\ &= \beta_1^{k-n} \hat{x}^{(1)}(n) - (\beta_1^{k-n} + \beta_1^{k-n+1} + \dots + \beta_1^{-1}) \beta_2\end{aligned}$$

当 $\beta_1 \neq 1$ 时, $\hat{x}^{(1)}(k) = \beta_1^{k-n} \hat{x}^{(1)}(n) + \frac{1-\beta_1^{k-n}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2$ 。

当 $\beta_1 = 1$ 时, $\hat{x}^{(1)}(k) = \hat{x}^{(1)}(n) + (k-n) \beta_2$ 。

取初始值 $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$, 可得 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 的预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} \beta_1^{k-n} x^{(1)}(n) + \frac{1-\beta_1^{k-n}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2, & \beta_1 \neq 1, \\ x^{(1)}(n) + (k-n) \beta_2, & \beta_1 = 1, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

(2) 对 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 作一次累减还原:

当 $\beta_1 \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(0)}(k) &= \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \\ &= \beta_1^{k-n} \hat{x}^{(1)}(n) - \beta_1^{k-n-1} \hat{x}^{(1)}(n) + \frac{1-\beta_1^{k-n}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 - \frac{1-\beta_1^{k-n-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \\ &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1} \hat{x}^{(1)}(n) + \frac{\beta_2}{1-\beta_1} \cdot (\beta_1^{k-n-1} - \beta_1^{k-n}) \\ &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1} \hat{x}^{(1)}(n) + \beta_2 \beta_1^{k-n-1}\end{aligned}$$

当 $\beta_1 = 1$ 时, $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) = \beta_2$ 。

取初始值 $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$, 可得无偏灰色模型的预测公式为

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \begin{cases} (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1} x^{(1)}(n) + \beta_2 \beta_1^{k-n-1}, & \beta_1 \neq 1, \\ \beta_2, & \beta_1 = 1, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (4.3.4)$$

从以上递推函数表达式中可以看出, 无偏灰色模型的预测公式依赖于参数 β_1, β_2 和初始值 $x^{(1)}(1), x^{(1)}(n)$, 选择不同的初始值将会直接影响到最终的模拟预测结果。为此, 我们采用以下方法对上述模型进行优化。

4.3.2 无偏灰色模型的优化

令上述两种模型 $\text{UBGM}-x^{(1)}(1)$ 、 $\text{UBGM}-x^{(1)}(n)$ 的初始值分别取为 $\hat{x}^{(1)}(1) = c_1$ 、 $\hat{x}^{(1)}(n) = c_n$ 。我们可以分别考虑以下两种准则来确定待定常数 c_1, c_n 。

准则 I 选取 c_1, c_n , 使得原始序列的一阶累加生成序列与其模拟值的误差平方和在最小二乘意义下最小, 即

$$\min_c S_1^2 = \sum_{t=2}^n [x^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t)]^2$$

在准则 I 下, 可得

$$c_1 = \begin{cases} \frac{\sum_{k=2}^n \left[x^{(1)}(k) - \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right] \beta_1^{k-1}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-1)}}, & \beta_1 \neq 1 \\ \frac{\sum_{k=2}^n x^{(1)}(k)}{n-1} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \beta_2, & \beta_1 = 1 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{\sum_{k=2}^n \left[x^{(1)}(k) - \frac{1-\beta_1^{k-n}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right] \beta_1^{k-n}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-n)}}, & \beta_1 \neq 1 \\ \frac{\sum_{k=2}^n x^{(1)}(k)}{n-1} + \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \beta_2, & \beta_1 = 1 \end{cases}$$

证明 略。

定理 4.3.3 在准则 I 下, 设 $\text{UBGM}-x^{(1)}(1)$ 、 $\text{UBGM}-x^{(1)}(n)$ 的初始值取为 $\hat{x}^{(1)}(1)=c_1$, $\hat{x}^{(1)}(n)=c_n$ 时, 它们的递推预测公式记为 $\hat{x}^{(0)}(k)|_{c_1}$, $\hat{x}^{(0)}(k)|_{c_n}$, 则 $\hat{x}^{(0)}(k)|_{c_1} = \hat{x}^{(0)}(k)|_{c_n}$ 。

证明 当 $\beta_1=1$ 时, $\hat{x}^{(0)}(k)|_{c_1} = \hat{x}^{(0)}(k)|_{c_n}$ 显然成立。

当 $\beta_1 \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k)|_{c_1} &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-2} \frac{\sum_{k=2}^n \left[x^{(1)}(k) - \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right] \cdot \beta_1^{k-1}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-1)}} + \beta_2 \cdot \beta_1^{k-2} \\ &= \frac{(\beta_1 - 1) \sum_{k=2}^n x^{(1)}(k) \cdot \beta_1^{k-1} + \beta_2 \sum_{k=2}^n (1 - \beta_1^{k-1}) \cdot \beta_1^{k-1} + \beta_2 \sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-1)}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-1)}} \\ &= \frac{(\beta_1 - 1) \sum_{k=2}^n x^{(1)}(k) \cdot \beta_1^{k-1} + \beta_2 \sum_{k=2}^n \beta_1^{k-1}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-1)}} \cdot \beta_1^{k-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta_1 - 1) \sum_{k=2}^n x^{(1)}(k) \cdot \beta_1^k + \beta_2 \sum_{k=2}^n \beta_1^k}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2k}} \cdot \beta_1^{k-1} \\
\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_n} &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1} \frac{\sum_{k=2}^n [x^{(1)}(k) - \frac{1 - \beta_1^{k-n}}{1 - \beta_1} \cdot \beta_2] \cdot \beta_1^k}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-n)}} + \beta_2 \cdot \beta_1^{k-n-1} \\
&= \frac{(\beta_1 - 1) \sum_{k=2}^n x^{(1)}(k) \cdot \beta_1^{k-n} + \beta_2 \sum_{k=2}^n (1 - \beta_1^{k-n}) \cdot \beta_1^{k-n} + \beta_2 \sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-n)}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-n)}} \cdot \beta_1^{k-n-1} \\
&= \frac{(\beta_1 - 1) \sum_{k=2}^n x^{(1)}(k) \cdot \beta_1^{k-n} + \beta_2 \sum_{k=2}^n \beta_1^{k-n}}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2(k-n)}} \cdot \beta_1^{k-n-1} \\
&= \frac{(\beta_1 - 1) \sum_{k=2}^n x^{(1)}(k) \cdot \beta_1^k + \beta_2 \sum_{k=2}^n \beta_1^k}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2k}} \cdot \beta_1^{k-1}
\end{aligned}$$

所以 $\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_1} = \hat{x}^{(0)}(k) |_{c_n}$ 。

准则 II 选取 c_1, c_n , 使得原始序列与其模拟值的误差平方和在最小二乘意义下最小, 即

$$\min_c S_0^2 = \sum_{t=2}^n [x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)]^2$$

在准则 II 下, 可得

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) - \beta_2 \beta_1^{k-2}] (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-2}}{\sum_{k=2}^n (\beta_1 - 1)^2 \beta_1^{2(k-2)}} \\
c_n &= \frac{\sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) - \beta_2 \beta_1^{k-n-1}] (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1}}{\sum_{k=2}^n (\beta_1 - 1)^2 \beta_1^{2(k-n-1)}}
\end{aligned}$$

证明 略。

定理 4.3.4 在准则 II 下, 设 UBGM- $x^{(1)}(1)$ 、UBGM- $x^{(1)}(n)$ 的初始值取

为 $\hat{x}^{(1)}(1)=c_1$, $\hat{x}^{(1)}(n)=c_n$ 时, 它们的递推预测公式为 $\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_1}$ 、 $\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_n}$, 则 $\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_1} = \hat{x}^{(0)}(k) |_{c_n}$ 。

证明

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_1} &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-2} \frac{\sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) - \beta_2 \beta_1^{k-2}] \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \beta_1^{k-2}}{\sum_{k=2}^n (\beta_1 - 1)^2 \cdot \beta_1^{2(k-2)}} + \beta_2 \cdot \beta_1^{k-2} \\ &= \frac{(\beta_1 - 1)^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \cdot \beta_1^{k-2}}{\sum_{k=2}^n (\beta_1 - 1)^2 \cdot \beta_1^{2(k-2)}} \cdot \beta_1^{k-2} = \frac{\sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \cdot \beta_1^k}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2k}} \cdot \beta_1^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_n} &= (\beta_1 - 1) \beta_1^{k-n-1} \frac{\sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) - \beta_2 \beta_1^{k-n-1}] \cdot (\beta_1 - 1) \cdot \beta_1^{k-n-1}}{\sum_{k=2}^n (\beta_1 - 1)^2 \cdot \beta_1^{2(k-2)}} + \beta_2 \cdot \beta_1^{k-n-1} \\ &= \frac{(\beta_1 - 1)^2 \sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \cdot \beta_1^{k-n-1}}{\sum_{k=2}^n (\beta_1 - 1)^2 \cdot \beta_1^{2(k-n-1)}} \cdot \beta_1^{k-n-1} = \frac{\sum_{k=2}^n x^{(0)}(k) \cdot \beta_1^k}{\sum_{k=2}^n \beta_1^{2k}} \cdot \beta_1^k\end{aligned}$$

所以 $\hat{x}^{(0)}(k) |_{c_1} = \hat{x}^{(0)}(k) |_{c_n}$ 。

4.3.3 应用实例

江苏省 1997~2004 年财政科技投入数据见表 4.11。对 1997~2002 年的财政科技投入数据分别用 UBGM- $x^{(1)}(1)$ 、UBGM- $x^{(1)}(n)$, 以及它们在两种准则下的优化模型, 建立预测模型, 对 2003 和 2004 年的财政科技投入量进行预测, 并进行分析比较。

表 4.11 1997~2004 年江苏省财政科技投入 (单位: 亿元)

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
财政科技投入	8.21	9.52	10.51	12.72	14.84	17.89	21.22	26.79

利用 1997~2002 年的财政科技投入数据建立 UBGM- $x^{(1)}(1)$ 模型, 得递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 9.1619 \times 1.1791^{k-2}$$

建立 UBGM- $x^{(1)}(n)$ 模型, 得递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 20.8828 \times 1.1791^{k-7}$$

准则 I 优化的 UBGM- $x^{(1)}(1)$ 模型, 得递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 9.1679 \times 1.1791^{k-2}$$

准则 I 优化的 UBGM- $x^{(1)}(n)$ 模型, 得递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 20.8853 \times 1.1791^{k-7}$$

准则 II 优化的 UBGM- $x^{(1)}(1)$ 模型, 得递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 9.1682 \times 1.1791^{k-2}$$

准则 II 优化的 UBGM- $x^{(1)}(n)$ 模型, 得递推公式

$$\hat{x}^{(0)}(k) = 20.8858 \times 1.1791^{k-7}$$

由定理 4.3.3、定理 4.3.4 可知, 在相同准则 (I、II) 下的两种优化模型的模拟、预测值是相等的, 因此, 根据以上递推公式, 得到四种模拟预测值, 见表 4.12。

表 4.12 四种模型的模拟预测值与实际值的比较 (单位: 亿元)

年份	实际值	UBGM- $x^{(1)}(1)$ 的模拟预测值	UBGM- $x^{(1)}(n)$ 的模拟预测值	准则 I 优化模型 的模拟预测值	准则 II 优化模型 的模拟预测值
1998	9.52	9.1619	9.1669	9.1679	9.1682
1999	10.51	10.8019	10.8077	10.8090	10.8091
2000	12.72	12.7355	12.7423	12.7438	12.7442
2001	14.84	15.0151	15.0232	15.0249	15.0254
2002	17.89	17.7028	17.7123	17.7144	17.7149
2003	21.22	20.8716	20.8828	20.8853	20.8858
2004	26.79	24.6076	24.6207	24.6237	24.6244

注: 1998~2002 年为模拟值, 2003、2004 年为预测值。

进一步计算四种模型的模拟误差与预测误差, 分别见表 4.13 和表 4.14。

表 4.13 四种模型对财政科技投入的模拟误差

误差类别	UBGM- $x^{(1)}(1)$ 模拟预测值	UBGM- $x^{(1)}(n)$ 模拟预测值	准则 I 优化模型 的模拟预测值	准则 II 优化模型 的模拟预测值
平均绝对误差/亿元	0.2056	0.2068	0.2071	0.2071
平均相对误差/%	1.78	1.79	1.79	1.79

注: 平均绝对误差 = $\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 |\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i)|$; 平均相对误差 = $\frac{1}{5} \sum_{i=2}^6 \frac{|\hat{x}^{(0)}(i) - x^{(0)}(i)|}{x^{(0)}(i)}$ 。

表 4.14 四种模型对财政科技投入的预测相对误差 (单位: %)

年份	UBGM- $x^{(1)}(1)$	UBGM- $x^{(1)}(n)$	准则 I 优化模型	准则 II 优化模型
2003	1.6418	1.5889	1.5775	1.5748
2004	8.1462	8.0968	8.0862	8.0837

由表 4.13、表 4.14 可以看到, 四种无偏灰色模型都取得较好模拟、预测效果, 且模拟预测结果接近, 这主要是由于这些模型已消除了传统 GM(1, 1) 模型的固有的指数偏差。递推解法无偏模型的模拟预测效果明显优于传统 GM(1, 1) 模型, 并且其模拟精度、一步预测精度亦略高于其他的优化模型。其主要原因在于, 递推解法避免了 GM(1, 1) 模型建模时由差分方程向微分方程的跳跃。

第5章 GM(1, 1) 幂模型

GM(1, 1) 幂模型主要用来描述具有饱和状态的过程, 开始阶段缓慢增长, 然后加速增长, 进入高速增长期, 最后, 由高速增长进入低速增长直至停止增长。它可以用来描述一类具有增长极限的社会经济现象, 常用于人口预测、生物生长和繁殖预测及产品经济寿命预测等, 常用统计学或经济计量学的方法进行参数估计并预测。但是, 统计学和经济计量学的建模方法要求原数据具有大样本的特点, 这在一定的情况下往往难以满足。灰色系统模型是通过累加生成弱化序列的随机性, 寻找系统变化规律并以此为基础建立的, 在一般情况下具有较高的模拟精度和预测精度, 能够取得较好的应用效果。而现有的文献还没有给出参数 α 的估计算法, 往往需要人们凭自己的经验或经过多次建模试验给出适当的 α 值, 这在一定程度上限制了灰色幂模型的应用。人们通常取 α 值为 2, 即灰色 Verhulst 模型用于具有饱和状态原始序列的建模、预测。事实上, 直接取 α 值为 2 缺乏一定的理论依据, 应该根据原始数据自身的特点, 给出一种优化算法来确定 α 的取值。

5.1 GM(1, 1) 幂模型求解方法的优化

5.1.1 GM(1, 1) 幂模型的定义

设非负原始序列为 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$, $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k=1, 2, \dots, n$ 。

$Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 紧邻均值生成序列:

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\},$$

其中 $z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k=2, 3, \dots, n$ 。

定义 5.1.1 设 $X^{(0)}$ 为非负的单峰原始数据序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 满足灰建模三条件的如下非线性模型, 称

$$x^{(0)}(k) + \alpha z^{(1)}(k) = b(z^{(1)}(k))^{\alpha} \quad (5.1.1)$$

为 GM(1, 1) 幂模型。

定义 5.1.2 称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + \alpha x^{(1)} = b(x^{(1)})^{\alpha} \quad (5.1.2)$$

为 GM (1, 1) 幂模型的白化方程。

引理 5.1.1 GM (1, 1) 幂模型之白化方程的解为

$$x^{(1)}(t) = \left\{ e^{-(1-\alpha)t} \left[(1-\alpha) \int b e^{(1-\alpha)t} dt + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.1.3)$$

引理 5.1.2 设 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $Z^{(1)}$ 如定义 5.1.1 所述,

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^{\alpha} \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^{\alpha} \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^{\alpha} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

则 GM (1, 1) 幂模型参数列 $\hat{a} = (a, b)^T$ 的最小二乘估计为

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (5.1.4)$$

以上仅仅给出了 GM (1, 1) 幂模型的定义, 对 α 的取值未作进一步的讨论, 而是根据实际情况的需要而给定, 在实际应用中通常取 $\alpha=2$ 即灰色 Verhulst 模型。

5.1.2 GM (1, 1) 幂模型参数 α 的估计

5.1.2.1 参数 α 的估计方法

对 GM (1, 1) 幂模型的白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^{\alpha}$ 两边同时除以 $(x^{(1)})^{\alpha}$ 得

$$\frac{\frac{dx^{(1)}}{dt}}{(x^{(1)})^{\alpha}} + a(x^{(1)})^{1-\alpha} = b \quad (5.1.5)$$

式 (5.1.5) 两边同时对 t 求导得

$$\frac{\left[\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} (x^{(1)})^{\alpha} - \alpha \cdot \left(\frac{dx^{(1)}}{dt} \right)^2 (x^{(1)})^{\alpha-1} \right]}{(x^{(1)})^{2\alpha}} + a(1-\alpha)(x^{(1)})^{-\alpha} \frac{dx^{(1)}}{dt} = 0$$

即

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} (x^{(1)})^{\alpha} - \alpha \cdot \left(\frac{dx^{(1)}}{dt} \right)^2 (x^{(1)})^{\alpha-1} = -a(1-\alpha)(x^{(1)})^{\alpha} \frac{dx^{(1)}}{dt} \quad (5.1.6)$$

当 $t=k$ 时, 根据灰导数的信息覆盖原理, 分别以 $x^{(1)}$ 的一阶和二阶灰导数, 即它的一阶和二阶差商覆盖式 (5.1.6) 中的 $\frac{dx^{(1)}}{dt}$ 与 $\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2}$, 以 $z^{(1)}(k)$ 覆盖 $x^{(1)}(k)$, 得

$$\begin{aligned} & [x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)][z^{(1)}(k)]^a - \alpha \cdot [x^{(0)}(k)]^2 [z^{(1)}(k)]^{a-1} \\ &= -a(1-\alpha)[z^{(1)}(k)]^a x^{(0)}(k) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

同理, 当 $t=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & [x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)][z^{(1)}(k+1)]^a - \alpha \cdot [x^{(0)}(k+1)]^2 [z^{(1)}(k+1)]^{a-1} \\ &= -a(1-\alpha)[z^{(1)}(k+1)]^a x^{(0)}(k+1) \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

式 (5.1.7) 除以式 (5.1.8) 得

$$\begin{aligned} & \frac{[x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)][z^{(1)}(k)]^a - \alpha \cdot [x^{(0)}(k)]^2 [z^{(1)}(k)]^{a-1}}{[x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)][z^{(1)}(k+1)]^a - \alpha \cdot [x^{(0)}(k+1)]^2 [z^{(1)}(k+1)]^{a-1}} \\ &= \frac{[z^{(1)}(k)]^a x^{(0)}(k)}{[z^{(1)}(k+1)]^a x^{(0)}(k+1)} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{[x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)] \cdot z^{(1)}(k) - \alpha \cdot [x^{(0)}(k)]^2}{[x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)] \cdot z^{(1)}(k+1) - \alpha \cdot [x^{(0)}(k+1)]^2} \\ &= \frac{z^{(1)}(k) \cdot x^{(0)}(k)}{z^{(1)}(k+1) \cdot x^{(0)}(k+1)} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

由式 (5.1.9) 可解出 α :

$$\alpha = \frac{A}{B}$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= [x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k)] \cdot z^{(1)}(k+1) \cdot z^{(1)}(k) \cdot x^{(0)}(k) \\ &\quad - [x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)] \cdot z^{(1)}(k+1) \cdot z^{(1)}(k) \cdot x^{(0)}(k+1) \\ B &= [x^{(0)}(k+1)]^2 \cdot z^{(1)}(k) \cdot x^{(0)}(k) \\ &\quad - [x^{(0)}(k)]^2 \cdot z^{(1)}(k+1) \cdot x^{(0)}(k+1) \end{aligned}$$

由 α 的表达式可以看出, 它能够反映原始数据的灰导数和灰积分的作用。

取 $k=2, 3, \dots, n-1$ 时, 可以得到 $n-2$ 个 α 值, 记为 α_k 。

令

$$g(\alpha) = \sum_{k=2}^{n-1} (\alpha - \alpha_k)^2 \quad (5.1.10)$$

使 $g(\alpha)$ 取最小值的 α 值就是待定的常数值。

由于 $g(\alpha)$ 为一条开口向上的抛物线, 根据求极值条件, 得 α 的最优值为

$$\alpha = \frac{1}{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} \alpha_k \quad (5.1.11)$$

此时, $g(\alpha)$ 取最小值。

5.1.2.2 参数 a 和 b 的估计

α 的最优值确定以后, 就可以直接按照最小二乘法来估计参数 a 和 b 。设 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $Z^{(1)}$ 如定义 5.1.1 所述, 且未知参数 α 估计值如公式 (5.1.11),

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^\alpha \\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^\alpha \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^\alpha \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

则 GM (1, 1) 幂模型参数列 $\hat{a} = (a, b)^\top$ 的最小二乘估计为

$$\hat{a} = (B^\top B)^{-1} B^\top Y \quad (5.1.12)$$

5.1.3 GM (1, 1) 幂模型白化微分方程的求解

由引理 5.1.1 可知, GM (1, 1) 幂模型的白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^\alpha$ 的解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left\{ e^{-(1-\alpha)\alpha} \left[(1-\alpha) \int b e^{(1-\alpha)\alpha} dt + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.1.13)$$

事实上, 式 (5.1.13) 还可以进一步计算, 使得引理 5.1.1 的结论得到进一步化简为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left[\frac{b}{a} + c e^{-(1-\alpha)\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.1.14)$$

证明 由于

$$(x^{(1)})^{-\alpha} \frac{dx^{(1)}}{dt} + a(x^{(1)})^{1-\alpha} = b \quad (5.1.15)$$

令 $y^{(1)} = (x^{(1)})^{1-\alpha}$, 则

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} = (1-\alpha)(x^{(1)})^{-\alpha} \frac{dx^{(1)}}{dt} \quad (5.1.16)$$

用 $1-\alpha$ 乘以式 (5.1.15) 的两端得

$$(1-\alpha)(x^{(1)})^{-\alpha} \frac{dx^{(1)}}{dt} + a(1-\alpha)(x^{(1)})^{1-\alpha} = b(1-\alpha) \quad (5.1.17)$$

再将式 (5.1.16) 代入 (5.1.17) 得

$$\frac{dy^{(1)}}{dt} + (1-\alpha)ay^{(1)} = b(1-\alpha) \quad (5.1.18)$$

通过伯努利方程的计算, 可知

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = e^{-(1-\alpha)\alpha} \left[(1-\alpha) \int b e^{(1-\alpha)\alpha} dt + c \right]$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(1)}(k+1) &= \left\{ e^{-(1-\alpha)\alpha} \left[(1-\alpha) \int b e^{(1-\alpha)\alpha} dt + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= \left\{ e^{-(1-\alpha)\alpha} \left[\frac{(1-\alpha)b}{(1-\alpha)\alpha} e^{(1-\alpha)\alpha} + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= \left[\frac{b}{\alpha} + c e^{-(1-\alpha)\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

若取初始值 $\hat{x}^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$, 则

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left\{ \frac{b}{\alpha} + \left[(x^{(0)}(1))^{1-\alpha} - \frac{b}{\alpha} \right] e^{-(1-\alpha)\alpha} \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.1.19)$$

当 $\alpha=2$ 时,

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left[\frac{b}{\alpha} + \left(\frac{1}{x^{(0)}(1)} - \frac{b}{\alpha} \right) e^{\alpha} \right]^{-1} \quad (5.1.20)$$

式 (5.1.20) 即为灰色 Verhulst 模型的时间响应式。

张辉和胡适耕 (2001)、刘斌等 (2003a) 的研究结果表明, 求解 GM(1, 1) 模型的白化方程时候, 初始值取为 $\hat{x}^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$ 会导致一定的误差, 考虑到微分方程边值条件对预测结果的影响, 我们可以分别考虑以下两种准则来确定式 (5.1.14) 中的常数 c 。

准则 I 选取 c , 使得原始序列的一阶累加生成序列与其预测值的误差平方和在最小二乘意义下最小, 即

$$\min_c S_1^2 = \sum_{t=2}^n [x^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t)]^2 \quad (5.1.21)$$

准则 II 选取 c , 使得原始序列与其预测值的误差平方和在最小二乘意义下最小, 即

$$\min_c S_0^2 = \sum_{t=2}^n [x^{(0)}(t) - \hat{x}^{(0)}(t)]^2 \quad (5.1.22)$$

其中, 还原值 $\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1)$ 。

在实际运用当中, 可先按两种准则分别计算出结果, 然后选择较优的一个。确定式 (5.1.14) 中的常数 c 以后, 可以计算出各时点的 $\hat{x}^{(1)}$, 再根据一阶还原式 $\hat{x}^{(0)}(t) = \hat{x}^{(1)}(t) - \hat{x}^{(1)}(t-1)$, 得到各时点的模拟、预测值。

5.1.4 GM(1, 1) 算模型解的性质

当参数 α 取不同值时, 通常会得到不同的结论, 根据 GM(1, 1) 算模型的

时间响应函数即式 (5.1.14) 及其定义式即式 (5.1.1) 可以得到以下性质:

$$(1) \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 且 } a > 0 \text{ 时, } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-a}};$$

$$(2) \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 且 } a < 0 \text{ 时, } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \infty;$$

(3) 当 $a=1$ 时, 模型无意义;

$$(4) \text{ 当 } a > 1 \text{ 且 } a > 0 \text{ 时, } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \infty;$$

$$(5) \text{ 当 } a > 1 \text{ 且 } a < 0 \text{ 时, } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-a}}.$$

证明 (1) 当 $0 < a < 1$ 且 $a > 0$ 时, 由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1-a)t} = 0$, $\hat{x}^{(1)}(t) = \left[\frac{b}{a} + ce^{-(1-a)t}\right]^{\frac{1}{1-a}}$, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-a}}$.

$$(2) \text{ 当 } 0 < a < 1 \text{ 且 } a < 0 \text{ 时, 由于 } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1-a)t} = \infty, \text{ 故 } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \infty.$$

(3) 当 $a=1$ 时, 时间响应函数式 (5.1.14) 无意义。

事实上, 此时定义式 $x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b(x^{(1)}(k))^a$ 可以转化为

$$x^{(0)}(k) = (b-a)x^{(1)}(k) \quad (5.1.23)$$

式 (5.1.23) 表明, 原始数据序列 $X^{(0)}$ 与一阶累加生成 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}$ 呈现正比例关系, 忽略了系统的灰作用量 b , 这与灰建模的基本思想是不符的, 灰作用量表示不可直接观测的系统作用, 具有信息覆盖的作用, 体现了灰色建模的“灰因果律”的思想。实际上, 这种情况只有在 $x^{(0)}(i) = x^{(0)}(j)$, $i, j=1, 2, \dots, n$ (即原始序列为常数序列) 时才能成立。

$$(4) \text{ 当 } a > 1 \text{ 且 } a > 0 \text{ 时, 由于 } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1-a)t} = \infty, \text{ 故 } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \infty.$$

$$(5) \text{ 当 } a > 1 \text{ 且 } a < 0 \text{ 时, 由于 } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(1-a)t} = 0, \hat{x}^{(1)}(t) = \left[\frac{b}{a} + ce^{-(1-a)t}\right]^{\frac{1}{1-a}},$$

$$\text{故 } \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-a}}.$$

可见, 当 $0 < a < 1$ 且 $a > 0$ 或 $a > 1$ 且 $a < 0$ 时, GM (1, 1) 幂模型类似于灰色 Verhulst 模型的性质, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x^{(1)}(t) \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-a}}$, 即有充分大的 t , 对任意 $k > t$, $x^{(1)}(k+1)$ 与 $x^{(1)}(k)$ 充分接近, 此时 $x^{(0)}(k+1) = x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) \approx 0$, 系统趋于死亡。

5.2 无偏 GM (1, 1) 幂模型

本节首先分析 GM (1, 1) 幂模型自身的模拟、预测误差问题, 在此基础

上, 借鉴无偏 GM(1, 1) 模型的建模思想, 构建无偏 GM(1, 1) 幂模型, 以消除 GM(1, 1) 幂模型的固有偏差, 以期使 GM(1, 1) 幂模型对具有近似单峰型或呈 S 原始数据的模拟预测能够取得更好的效果。

5.2.1 GM(1, 1) 幂模型的偏差分析

以文献(邓聚龙, 2002b)中 P307 的算例为例, 建立灰色 Verhulst 模型的模拟、预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{11.5789}{1 + 10.5789e^{-1.347845k}}$$

取 $k=0, 1, 2, 3$, 得模拟值

$$\hat{X}^{(1)} = \{\hat{x}^{(1)}(1), \hat{x}^{(1)}(2), \dots, \hat{x}^{(1)}(n)\} = \{1, 3.089029, 6.755359, 9.767059\}$$

作一阶累减还原得

$$\hat{X}^{(0)} = \{1, 2.089029, 3.66633, 3.0117\}$$

若以 $\hat{X}^{(0)}$ 为原始数据建立灰色 Verhulst 模型, 得到响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \frac{1}{0.303299 + 0.696701e^{-1.8513493k}}$$

取 $k=0, 1, 2, 3$, 模拟值为

$$\hat{X}^{(0)'} = \{1, 2.423076, 3.120344, 3.268012\}$$

以上模拟值的平均相对误差为 13.13%。可见, 即使用完全满足灰色 Verhulst 模型响应函数形式的数据建立灰色 Verhulst 模型仍然会产生误差。我们认为, 这与传统 GM(1, 1) 模型对纯指数数据模拟会产生误差一样, 这种误差来源于模型本身, 要想消除这种误差, 就必须对模型进行必要的改进。

事实上, 我们只需对式 (5.1.19) 进行适当变换, 便可以得到一种无偏 GM(1, 1) 幂模型, 从而消除模型自身固有的误差。

由于原始序列 $X^{(0)}$ 非负, 对式 (5.1.19) 两边同时取 $1-\alpha$ 次方得

$$[\hat{x}^{(1)}(t)]^{1-\alpha} = \frac{b}{a} + \left[(x^{(0)}(1))^{1-\alpha} - \frac{b}{a} \right] e^{-(1-\alpha)\alpha} \quad (5.2.1)$$

式 (5.2.1) 右边为关于 t 的非齐次指数函数, 这在形式上和 GM(1, 1) 模型对一阶累加生成序列的时间响应式是一致的。无偏 GM(1, 1) 模型的统一时间响应表达式为

$$x^{(1)}(k) = e^{-\alpha} x^{(1)}(k-1) + \frac{b}{a} (1 - e^{-\alpha}), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (5.2.2)$$

其中 $-\alpha$ 为发展系数, b 为灰色作用量。

再令 $\beta_1 = e^{-\alpha}$, $\beta_2 = \frac{b}{a} (1 - e^{-\alpha})$, 式 (5.2.2) 可以表示为

$$x^{(1)}(k) = \beta_1 x^{(1)}(k-1) + \beta_2, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (5.2.3)$$

上述模型中的待估计参数列 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ 可以直接通过最小二乘原理进行估计。

综上所述, 我们只需对适合于 GM (1, 1) 幂模型建模的原始数据作幂生成, 使其与 GM (1, 1) 模型对一阶累加生成序列的时间响应式具有一致的非齐次指数函数形式, 再按照无偏 GM (1, 1) 模型直接建模法建立模型, 我们便可以得到无偏 GM (1, 1) 幂模型。

5.2.2 无偏 GM (1, 1) 幂模型与求解

定义 5.2.1 设 $X^{(0)}$ 为原始序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, 称序列

$$Y^{(1)} = \{y^{(1)}(1), y^{(1)}(2), \dots, y^{(1)}(n)\}$$

(其中 $y^{(1)}(k) = [x^{(1)}(t)]^{1-\alpha}$, $k=1, 2, \dots, n$) 为 $X^{(1)}$ 的 $1-\alpha$ 次幂生成序列。

定义 5.2.2 设 $X^{(0)}$ 为原始序列, $X^{(1)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Y^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的幂生成序列, 则称

$$\begin{cases} y^{(1)}(k) = \beta_1 y^{(1)}(k-1) + \beta_2, \\ x^{(1)}(k) = [y^{(1)}(k)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (5.2.4)$$

为无偏 GM (1, 1) 幂模型。

无偏 GM (1, 1) 幂模型中的待估计参数列 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ 可以直接通过最小二乘原理进行估计。

若 $\hat{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T$ 为无偏 GM (1, 1) 幂模型的参数向量, 则无偏灰色模型参数的最小二乘估计为

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (5.2.5)$$

$$\text{其中 } Y = \begin{bmatrix} y^{(1)}(2) \\ y^{(1)}(3) \\ \vdots \\ y^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y^{(1)}(1) & 1 \\ y^{(1)}(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

定理 5.2.1 设 B 、 Y 、 $\hat{\beta}$ 如定义 5.2.2 所述, $\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$, 则无偏 GM (1, 1) 幂模型的解为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} \left[\beta_1^{k-1} (x^{(0)}(1))^{1-\alpha} + \frac{1-\beta_1^{k-1}}{1-\beta_1} \cdot \beta_2 \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \beta_1 \neq 1 \\ [(x^{(0)}(1))^{1-\alpha} + k\beta_2]^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \beta_1 = 1 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

其中 $k=2, 3, \dots, n$ 。

证明 分别取式 (5.2.4) 中 $k=2, 3, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned}y^{(1)}(2) &= \beta_1 y^{(1)}(1) + \beta_2 \\y^{(1)}(3) &= \beta_1 y^{(1)}(2) + \beta_2 \\&\dots\dots\end{aligned}\quad (5.2.7)$$

$$y^{(1)}(n) = \beta_1 y^{(1)}(n-1) + \beta_2$$

将 $y^{(1)}(j-1)$ 依次代入 $y^{(1)}(j)$, $j=2, 3, \dots, k$, 可得

$$\begin{aligned}y^{(1)}(k) &= \beta_1 y^{(1)}(k-1) + \beta_2 \\&= \beta_1 [\beta_1 y^{(1)}(k-2) + \beta_2] + \beta_2 \\&= \dots \\&= \beta_1^{k-1} y^{(1)}(1) + (\beta_1^{k-1} + \beta_1^{k-2} + \dots + \beta_1 + 1) \beta_2\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

当 $\beta_1 \neq 1$ 时,

$$y^{(1)}(k) = \beta_1^{k-1} y^{(1)}(1) + \frac{1 - \beta_1^{k-1}}{1 - \beta_1} \cdot \beta_2 \quad (5.2.9)$$

当 $\beta_1 = 1$ 时,

$$y^{(1)}(k) = y^{(1)}(1) + k\beta_2 \quad (5.2.10)$$

取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$, 对 $\hat{y}^{(1)}(k)$ 作幂还原, 可得 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 的预测公式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} \left[\beta_1^{k-1} (x^{(0)}(1))^{1-a} + \frac{1 - \beta_1^{k-1}}{1 - \beta_1} \cdot \beta_2 \right]^{\frac{1}{1-a}}, & \beta_1 \neq 1 \\ [(x^{(0)}(1))^{1-a} + k\beta_2]^{\frac{1}{1-a}}, & \beta_1 = 1 \end{cases} \quad (5.2.11)$$

定理 5.2.2 设 B 、 Y 、 $\hat{\beta}$ 如定义 5.2.2 所述, $\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 若取初始值 $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$, 则无偏 GM(1, 1) 幂模型的解为

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} \left[\beta_1^{k-n} (x^{(1)}(n))^{1-a} + \frac{1 - \beta_1^{k-n}}{1 - \beta_1} \cdot \beta_2 \right]^{\frac{1}{1-a}}, & \beta_1 \neq 1 \\ [(x^{(1)}(n))^{1-a} + (k-n)\beta_2]^{\frac{1}{1-a}}, & \beta_1 = 1 \end{cases} \quad (5.2.12)$$

其中 $k=2, 3, \dots, n$ 。

证明 将式 (5.2.4) 作以下变换:

$$y^{(1)}(k-1) = \frac{1}{\beta_1} (y^{(1)}(k) - \beta_2) \quad (5.2.13)$$

分别取式 (5.2.13) 中 $k=2, 3, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned}
 y^{(1)}(1) &= \frac{1}{\beta_1}(y^{(1)}(2) - \beta_2) \\
 y^{(1)}(2) &= \frac{1}{\beta_1}(y^{(1)}(3) - \beta_2) \\
 &\dots\dots \\
 y^{(1)}(n-1) &= \frac{1}{\beta_1}(y^{(1)}(n) - \beta_2)
 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

将 $y^{(1)}(j)$ 依次代入 $y^{(1)}(j-1)$, $j=k, k+1, \dots, n$, 可得

$$\begin{aligned}
 y^{(1)}(k) &= \frac{1}{\beta_1}(y^{(1)}(k+1) - \beta_2) \\
 &= \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1}{\beta_1}(y^{(1)}(k+2) - \beta_2) - \beta_2 \right] \\
 &= \dots \\
 &= \beta_1^{k-n} y^{(1)}(n) - (\beta_1^{k-n} + \beta_1^{k-n+1} + \dots + \beta_1^{-1}) \beta_2
 \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

当 $\beta_1 \neq 1$ 时,

$$y^{(1)}(k) = \beta_1^{k-n} y^{(1)}(n) + \frac{1 - \beta_1^{k-n}}{1 - \beta_1} \cdot \beta_2; \tag{5.2.16}$$

当 $\beta_1 = 1$ 时,

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \hat{x}^{(1)}(n) + (k-n)\beta_2 \tag{5.2.17}$$

取初始值 $\hat{x}^{(1)}(n) = x^{(1)}(n)$, 对 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 作幂还原, 可得 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 的预测公式

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} \left[\frac{\beta_1^{k-n}}{x^{(1)}(n)} + \frac{1 - \beta_1^{k-n}}{1 - \beta_1} \cdot \beta_2 \right]^{-1}, & \beta_1 \neq 1, \\ \left[\frac{1}{x^{(1)}(n)} + (k-n)\beta_2 \right]^{-1}, & \beta_1 = 1, \end{cases} \quad k = 2, 3, \dots, n \tag{5.2.18}$$

由定理 5.2.1 和定理 5.2.2 求出一阶累加生成序列预测值, 再将其作一次累减还原, 便可得到最终的预测值

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

由上述建模过程可以看出, 递推解法无需通过白化微分方程解得时间响应式, 这也就使得无偏 GM(1, 1) 幂模型避免了以往建模方法由差分方程向微分方程的跳跃导致的误差。

定理 5.2.3 无偏 GM(1, 1) 幂模型对传统 GM(1, 1) 幂模型时间响应式所表达的 S 型曲线 $x^{(1)}(k) = [d + ce^{-(1-a)ak}]^{-\frac{1}{1-a}}$ 进行模拟具有完全重合性。

证明 仅证明取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$ 的情况。设原始数据的一阶累加

生成序列为

$$X^{(1)} = \{[d + ce^{-(1-a)a}]^{\frac{1}{1-a}}, [d + ce^{-2(1-a)a}]^{\frac{1}{1-a}}, \dots, [d + ce^{-n(1-a)a}]^{\frac{1}{1-a}}\}, \quad c, d \neq 0$$

根据定义 5.2.2 作最小二乘估计, 待估计参数列为

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (5.2.19)$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} d + ce^{-2(1-a)a} \\ d + ce^{-3(1-a)a} \\ \vdots \\ d + ce^{-n(1-a)a} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} d + ce^{-(1-a)a} & 1 \\ d + ce^{-2(1-a)a} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ d + ce^{-(n-1)(1-a)a} & 1 \end{bmatrix}$$

我们知道

$$(B^T B)^{-1} = \frac{1}{|B^T B|} (B^T B) (B^T B)^* \quad (5.2.20)$$

其中

$$B^T B = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k})^2 & \sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k}) \\ \sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k}) & n-1 \end{bmatrix} \quad (5.2.21)$$

其行列式和伴随矩阵分别为

$$|B^T B| = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k})^2 - \left[\sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k}) \right]^2 \quad (5.2.22)$$

$$(B^T B)^* = \begin{bmatrix} n-1 & -\sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k}) \\ -\sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k}) & \sum_{k=1}^{n-1} (d + ce^{a(1-a)k})^{-2} \end{bmatrix} \quad (5.2.23)$$

将式 (5.2.20) 代入式 (5.2.19) 得

$$\hat{\beta} = (B^T B)^{-1} B^T Y = (\beta_1, \beta_2)^T = (ce^{a(1-a)}, d(1 - ce^{a(1-a)}))^T \quad (5.2.24)$$

再将式 (5.2.24) 代入式 (5.2.16) 得

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \begin{cases} [d + ce^{-(1-a)ak}]^{\frac{1}{1-a}}, & \beta_1 \neq 1, \text{ 且 } a \neq 1 \\ d + c, & \beta_1 = 1, \text{ 且 } a \neq 1 \end{cases} \quad (5.2.25)$$

则模拟序列

$$\hat{X}^{(1)} = \{[d + ce^{-(1-a)a}]^{\frac{1}{1-a}}, [d + ce^{-2(1-a)a}]^{\frac{1}{1-a}}, \dots, [d + ce^{-n(1-a)a}]^{\frac{1}{1-a}}\}$$

5.2.3 数据模拟与实例预测

例 5.2.1 以文献(邓聚龙, 2002b)中 P307 算例来验证定理 5.2.3。该例中原始数据近似单峰型, 一阶累加生成后呈 S 型, 建立灰色 Verhulst 模型 ($\alpha=2$) 得模拟序列为

$$X^{(0)} = \{1, 2.089029, 3.66633, 3.0117\}$$

(1) 以 $\hat{X}^{(0)}$ 为原始数据再次作传统灰色 Verhulst 模型, 得到响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (0.303299 + 0.696701e^{-1.8513493k})^{-1}$$

其模拟误差见表 5.1。

表 5.1 传统灰色 Verhulst 模型的模拟误差

k	2	3	4
实际值	2.089029	3.66633	3.0117
模拟值	2.423076	3.120344	3.268012
残差	0.334047	-0.545986	0.256312
相对误差/%	15.99	-14.89	8.51

由表 5.1 可见, 传统灰色 Verhulst 模型对由其本身的模拟预测值再次建模仍然存在较大的偏差, 相对模拟误差最高竟高达 15.99%, 平均相对误差也高达 13.13%。

(2) 以 $\hat{X}^{(0)}$ 为原始数据作无偏 GM(1, 1) 幂模型 ($\alpha=2$), 取初始值 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$, 得递推预测公式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(0.2598^k + \frac{1-0.2598^k}{1-0.2598} \cdot 0.063927\right)^{-1}$$

取 $k=0, 1, 2, 3$, 模拟序列为 $\{1, 2.089029, 3.66633, 3.0117\}$, 与原始数据完全一致。可见无偏 GM(1, 1) 幂模型完全消除了模型自身所固有误差。

例 5.2.2 下面分别利用灰色 Verhulst 模型和本节提出的无偏 GM(1, 1) 幂模型, 对南京市水路货运量进行模拟、预测, 分析比较它们的精度。南京市 1997~2002 年水路货运量数据见表 5.2。

表 5.2 南京市 1997~2002 年水路货运量 (单位: 10^4 t)

年份	1997	1998	1999	2000	2001	2002
运量	3531	3703	4073	4275	4123	4122

表 5.2 中的数据呈现出单峰的特性, 因此, 符合 GM (1, 1) 幂模型的基本条件。

(1) 利用 1997~2001 年的数据建立灰色 Verhulst 模型。

取 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = 3531$, 可得时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (0.0002317 + 0.000051e^{-0.4840443k})^{-1}$$

累减还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

(2) 利用 1997~2001 年的数据建立无偏 GM (1, 1) 幂模型 ($\alpha=2$)。

取 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) = 3531$, 可得递推预测公式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[\frac{0.549493^k}{3531} + \frac{1-0.549493^k}{1-0.549493} \cdot 0.000106 \right]^{-1}$$

两种模型的模拟预测值与实际值的比较情况见表 5.3。

表 5.3 两种模型的模拟预测值与实际值的比较

年份	实际值 / 10^4t	灰色 Verhulst 模型		无偏 GM (1, 1) 幂模型	
		模拟预测值 / 10^4t	相对误差/%	模拟预测值 / 10^4t	相对误差/%
1998	3703	3796.170	2.52	3820.254	3.2
1999	4073	3980.398	-2.27	4000.324	-1.8
2000	4275	4103.100	-4.02	4106.689	-3.9
2001	4123	4182.566	-1.45	4167.580	1.1
2002	4122	4233.093	-2.70	4201.814	1.9
平均相对 误差/%		—	2.59	—	2.38

注: 1998~2001 年为模拟值, 2002 年为预测值。

由表 5.2 可以看到, 无偏模型对 2002 年的预测精度要显著高于传统模型; 对 1999~2001 年的模拟误差也明显小于传统模型。虽然 1998 年的模拟误差略大于传统模型, 但是, 无偏模型的平均相对误差要小于传统模型, 这种现象在实际应用中出现也是正常的。因此, 总体来看, 无偏幂模型比传统灰色 Verhulst 模型更具有优势, 我们认为, 其原因就在于无偏灰色 Verhulst 模型消除了原模型自身所固有偏差。

(3) 利用本节提出的方法确定参数 α 的取值, 再建立 GM (1, 1) 幂模型。

首先将 1997~2001 年的数据代入参数 α 的计算公式, 得 $\alpha=0.392844$; 再根

据最小二乘法估计出 $a=0.194663$; $b=163.017$ 。

由 GM (1, 1) 幂模型解的性质可知, 本例中, $0 < \alpha < 1$ 且 $a > 0$,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, 这与灰色 Verhulst 模型的极限性质是一致的。

取 $x^{(1)}(0) = x^{(1)}(1) = 3531$, 可得时间响应式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (837.435 - 694.833e^{-0.1181905k})^{1.647023}$$

累减还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

若对时间响应函数进行优化, 会得到更精确的模拟、预测结果, 这里为了和传统的灰色 Verhulst 模型进行比较将白化微分方程的初始值都取为 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$, 这样同样可以说明本节 α 取值方法的优越性, 两种模型的模拟、预测值与实际值的比较见表 5.4。由表 5.4 可以看到, 按照本节提出的方法确定 GM(1, 1) 幂模型中的参数 α 比直接取 $\alpha=2$ (灰色 Verhulst 模型) 能够取得更好的模拟、预测效果。

表 5.4 参数 α 的不同取值的模拟预测值与实际值的比较

年份	实际值	灰色 Verhulst 模型 ($\alpha=2$)		GM(1, 1) 幂模型 $\alpha=0.392844$	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
1998	3703	3796.170	2.52	3683.608	-0.52
1999	4073	3980.398	-2.27	4079.616	0.16
2000	4275	4103.100	-4.02	4200.990	-1.73
2001	4123	4182.566	-1.45	4156.949	0.82
2002	4122	4233.093	-2.70	4011.563	-2.68
平均相对 误差/%		—	2.59	—	2.38

注: 1998~2001 年为模拟值, 2002 年为预测值。

我们在研究 GM (1, 1) 幂模型的同时, 提出了无偏 GM (1, 1) 幂模型, 该模型对传统 GM (1, 1) 幂模型预测公式所表达的 S 型曲线进行模拟和预测具有完全重合性, 完全消除了 GM (1, 1) 幂模型自身固有的偏差, 也免了以往建模方法由差分方程向微分方程的跳跃导致的误差。并尝试性地给出了 GM (1, 1) 幂模型中参数 α 的估计方法, 研究了参数 α 的不同取值对模型解的极限性质的影响, 并与灰色 Verhulst 模型进行了对比。结果显示该建模方法更能适应一类具有饱和状态或发展变化受众多因素影响的波动原始序列, 在应用范围和预测精度方面都要优于灰色 Verhulst 模型, 合理地确定参数 α 的取值

对于 GM (1, 1) 幂模型的推广应用有着重要的意义。

然而, 由灰色系统的非唯一性原理可知, 灰参数 α 的白化方法并不唯一, 因此, 参数 α 的白化方法及其对模型精度的影响仍然有待于进一步研究。另一方面, 无偏 GM (1, 1) 幂模型的预测公式仍然是指数形式, 这就决定了该模型在实际应用中仍然只能适用于短期预测, 而对于较长期的预测往往会产生较大偏差。因此, 从这个角度来说, 还需要进一步改进既有灰预测模型和构造新模型, 以促进灰色预测理论的不断发展与完善。

第6章 灰色关联分析模型

灰色关联分析不仅是灰色系统理论的重要内容之一,而且是灰色预测、灰色决策、灰色控制的重要基石。下面就关联分析理论进行介绍。

6.1 灰关联空间

定义 6.1.1 设 $X_0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\}$ 为数据行为参考序列。

$$X_1 = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)\}$$

.....

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}$$

.....

$$X_m = \{x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(n)\}$$

为数据行为比较序列。给定实数 $\gamma(x_0(k), x_i(k))$, 若实数

$$\gamma(X_0, X_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \gamma(x_0(k), x_i(k))$$

满足

(1) 规范性。 $0 < \gamma(X_0, X_i) \leq 1, \gamma(X_0, X_i) = 1 \Leftrightarrow X_0 = X_i$ 。

(2) 整体性。对于 $X_i, X_j \in X = \{X_s \mid s=0, 1, 2, \dots, m; m \geq 2\}$, 有

$$\gamma(X_i, X_j) \neq \gamma(X_j, X_i), \quad i \neq j$$

(3) 偶对称性。对于 $X_i, X_j \in X$, 有

$$\gamma(X_i, X_j) = \gamma(X_j, X_i) \Leftrightarrow X = \{X_i, X_j\}$$

(4) 接近性。

$$|x_0(k) - x_i(k)| \text{ 越小, } \gamma(x_0(k), x_i(k)) \text{ 越大}$$

则称 $\gamma(X_0, X_i)$ 为 X_i 对 X_0 的灰色关联度, $\gamma(x_0(k), x_i(k))$ 为 X_i 对 X_0 在 k 点的关联系数, 并称条件 (1), (2), (3), (4) 为灰色关联四公理。 γ 称为灰关联映射。

在灰色关联公理中, $\gamma(X_0, X_i) \in (0, 1]$ 表明系统中任何两个行为数据序列都不可能是严格无关联的。

整体性则体现了环境对灰色关联比较的影响, 环境不同, 灰色关联度亦随之

变化, 因此对称原理不一定满足。

偶对对称性表明, 当灰色关联因子集中只有两个数据序列时, 两两比较满足对称性。

接近性是对关联度量化的约束。

定义 6.1.2 令 X 为行为数据序列集, Γ 为灰色关联映射集, 当 Γ 满足灰色关联四公理时, 称 (X, Γ) 为灰色关联空间。

6.2 指标数据序列生成及其性质

为了提高建模精度, 灰色系统理论在建模前, 通常要对原始数据序列进行必要的数据生成, 以便消除数据序列中的不同量纲及不可比性。

6.2.1 单指标数据序列的生成

对于单指标数据序列, 主要是消除它们之间的不同量纲问题。

定义 6.2.1 设有非负数据序列 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 。

若

$$x(k)d_1 = \frac{x(k)}{x(1)}, \quad x(1) \neq 0, k = 1, 2, \dots, n$$

则称 d_1 为初值化生成;

若

$$x(k)d_2 = \frac{x(k)}{\bar{x}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i), k = 1, 2, \dots, n$$

则称 d_2 为均值化生成;

若

$$x(k)d_3 = \frac{x(k)}{\max_k \{x(k)\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则称 d_3 为百分比生成;

若

$$x(k)d_4 = \frac{x(k)}{\min_k \{x(k)\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则称 d_4 为倍数生成;

若

$$x(k)d_5 = \frac{x(k) - \min_k \{x(k)\}}{\max_k \{x(k)\} - \min_k \{x(k)\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

或

$$x(k)d_5 = \frac{\max_k \{x(k)\} - x(k)}{\max_k \{x(k)\} - \min_k \{x(k)\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则称 d_5 为区间化生成。

以上生成 $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ 统称为无量纲化生成。

定理 6.2.1 对于非负数据序列 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 上述无量纲化生成 $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ 满足

(1) 保号性。当 $x(i) > 0$ 时, $d_k x(i) > 0 (i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, 3, 4, 5)$;

(2) 保序性。若 $x(i) < x(j)$ 时, 则 $d_k x(i) < d_k x(j)$;

若 $x(i) > x(j)$ 时, 则 $d_k x(i) > d_k x(j) (k=1, 2, 3, 4, 5)$ 。

证明 (1) 因为 $X = \{x(1), x(2), \dots, x(n)\}$ 为非负数据序列, 所以有 $x(i) > 0$ 。对于初值化生成, 则

$$d_1 x(i) = \frac{x(i)}{x(1)} > 0, \quad x(1) > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

对于均值化生成, 由于 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(i) > 0$, 所以

$$d_2 x(i) = \frac{x(i)}{\bar{x}} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

对于百分比生成、倍数生成、区间化生成同理可证, 即无量纲化生成满足保号性。

(2) 对于初值化生成, 若 $x(i) < x(j)$, 则

$$d_1 x(i) = \frac{x(i)}{x(1)} < \frac{x(j)}{x(1)} = d_1 x(j)$$

若 $x(i) > x(j)$, 则

$$d_1 x(i) = \frac{x(i)}{x(1)} > \frac{x(j)}{x(1)} = d_1 x(j)$$

对于均值化生成, 若 $x(i) < x(j)$, 则

$$d_2 x(i) = \frac{x(i)}{\bar{x}} < \frac{x(j)}{\bar{x}} = d_2 x(j)$$

若 $x(i) > x(j)$, 则

$$d_2 x(i) = \frac{x(i)}{\bar{x}} > \frac{x(j)}{\bar{x}} = d_2 x(j)$$

对于百分比生成、倍数生成、区间化生成同理可证, 即无量纲化生成满足保序性。

6.2.2 多指标数据序列的生成

对于多指标数据序列,由于指标集中的指标具有不同的量纲,在建模时,它们难以进行指标间直接对比分析,因而需要对原始数据序列进行初始化处理,由于初始化处理方法较多,如均值化生成、始点零象化生成、初值化生成、百分比生成、归一化生成、级差最大值化生成、区间值化生成等,使用不同的初始化生成处理方法可能会导致模型结果的不同。而现有的对数据序列的处理都是采用的 $[0, 1]$ 区间线性生成法,这种方法存在只奖不罚的不足。因此我们利用 Vague 思想和集对分析理论思想,把 $[0, 1]$ 区间上的线性生成拓广到 $[-1, 1]$ 上的线性生成,提出了一种易于计算且实用的 $[-1, 1]$ 线性生成算子,其基本思想就是对于在数据序列中的指标值如果优于平均水平时,赋予 $0 \sim 1$ 的正值,如果劣于平均水平时,赋予 $0 \sim -1$ 的负值,具体做法如下:

设指标数据序列为

$$X_1 = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)\}$$

$$X_2 = \{x_2(1), x_2(2), \dots, x_2(n)\}$$

.....

$$X_m = \{x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(n)\}$$

设数据序列指标集为 A , $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$; 一般情况下指标属性可分为三种类型,即效益型、成本型和区间型指标(固定型可视为区间型的特例)。所谓效益型指标,就是其值越大越好;成本型指标就是其值越小越好;区间型指标就是其值落在某一特定区间 $[A, B]$ 为最好。

令 $A = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$, 且 $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, 其中 Ω_1 为效益型指标集, Ω_2 为成本型指标集, Ω_3 为区间型指标集。

定义 6.2.2 令

$$Z(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i(k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

若 A_k 为效益型指标,则

$$r_i(k) = \frac{x_i(k) - z(k)}{\max_i \{x_i(k)\} - z(k), z(k) - \min_i \{x_i(k)\}}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

若 A_k 为成本型指标,则

$$r_i(k) = \frac{z(k) - x_i(k)}{\max_i \{x_i(k)\} - z(k), z(k) - \min_i \{x_i(k)\}}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

若 A_k 为 $[A, B]$ 区间型指标 (包括固定型指标, 此时 $A=B$), 则

$$r_i(k) = \begin{cases} 1 - \frac{2(A - x_i(k))}{A - \min_i \{x_i(k)\}}, & x_i(k) < A \\ 1 - \frac{2(x_i(k) - B)}{\max_i \{x_i(k)\} - B}, & x_i(k) > B, i = 1, 2, \dots, m \\ 1, & x_i(k) \in [A, B] \end{cases}$$

以上生成称为 $[-1, 1]$ 线性生成算子。

通过此线性生成算子对原始数据序列 $X_i = \{x_i(k)\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) 进行规范化变换, 则规范化数据序列 $R_i(k) = \{r_i(k)\}$ ($i=1, 2, \dots, m$) 中的元素都是无量纲的, 并且所有的元素均符合奖优罚劣的标准及 Vague 思想, 而对任意的 $r_i(k) \in [-1, 1]$ ($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$), 由于规范化数据序列中的元素无量纲, 因此它们之间可以进行直接比较分析。

6.3 几种灰色关联度的适用范围

关联度是事物之间、因素之间关联性的一种方法, 它是根据事物或因素间曲线的相似程度来判断其关联程度的, 若两条曲线的形状越相似, 则它们的关联度就越大; 反之就越小。

从现有的研究来看, 判断因素数据序列间关联度的方法很多, 但从关联度的结构与机理来看, 主要分为以下几种: 邓氏关联度、绝对关联度、相对关联度、斜率关联度、T 型关联度、B 型关联度、C 型关联度、改进的关联度。吕锋等对七种灰色关联度进行了比较, 肖新平、张绍良等分别从不同的方面研究了它们之间的各自存在的问题。下面就它们各自的适用范围进行探索。

设 $X_0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\}$ 为数据行为参考序列,

$$X_1 = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)\}$$

.....

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}$$

.....

$$X_m = \{x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(n)\}$$

为数据行为比较序列。

(1) 邓氏关联度。

$$\gamma(x_0, x_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(x_0(k), x_i(k))$$

其中

$$r(x_0(k), x_i(k)) = \frac{\min_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}{\max_i \min_k |x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)|}$$

ρ 为分辨系数, 且 $\rho \in [0, 1]$ 。

(2) 灰色绝对关联度。

$$\epsilon_{0i} = \frac{1 + |s_0| + |s_i|}{1 + |s_0| + |s_i| + |s_i - s_0|}$$

其中

$$|s_0| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} x_0^0(k) + \frac{1}{2} x_0^0(n) \right|, \quad |s_i| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} x_i^0(k) + \frac{1}{2} x_i^0(n) \right|$$

$$|s_i - s_0| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} (x_i^0(k) - x_0^0(k)) + \frac{1}{2} (x_i^0(n) - x_0^0(n)) \right|$$

X_0^0 或 X_i^0 为 X_0 与 X_i 的始点零化象。

(3) 相对关联度。

设 X_0, X_i 长度相同, 且初值皆不等于零, X'_0, X'_i 分别为 X_0, X_i 的初值象, 则称 X'_0 与 X'_i 的灰色绝对关联度为 X_0 与 X_i 的灰色相对关联度, 简称为相对关联度, 记为 r_{0i} 。

$$r_{0i} = \frac{1 + |s'_0| + |s'_i|}{1 + |s'_0| + |s'_i| + |s'_i - s'_0|}$$

(4) 斜率关联度。

$$\epsilon_i = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \xi_i(t)$$

其中

$$\xi_i(t) = \frac{1 + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right|}{1 + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right| + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} - \frac{1}{y_i} \cdot \frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t} \right|}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t), \quad \Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(t), \quad \Delta y_i(t) = y_i(t + \Delta t) - y_i(t)$$

(5) T 型关联度。

$$\gamma(x_0, x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(k)$$

其中

$$\zeta(k) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\Delta y_0(t_k) \cdot \Delta y_1(t_k)) \cdot \frac{\min\{|\Delta y_0(t_k)|, |\Delta y_1(t_k)|\}}{\max\{|\Delta y_0(t_k)|, |\Delta y_1(t_k)|\}}, & \Delta y_0(t_k) \Delta y_1(t_k) \neq 0 \\ 0, & \Delta y_0(t_k) \Delta y_1(t_k) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta y_i(t_k) = \frac{x_i(k)}{D_i}, \quad D_i = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta x_i(k)|$$

(6) B 型关联度。

$$D_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} d_{ij}^{(0)} + \frac{1}{n-1} d_{ij}^{(1)} + \frac{1}{n-2} d_{ij}^{(2)}}$$

其中

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(0)} &= \sum_{k=1}^n d_{ij}^{(0)}(k) = \sum_{k=1}^n |x_i(k) - x_j(k)| \\ d_{ij}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} d_{ij}^{(1)}(k) = \sum_{k=1}^{n-1} |x_i(k+1) - x_j(k+1) - x_i(k) + x_j(k)| \\ d_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=2}^{n-1} d_{ij}^{(2)}(k) = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} [|x_i(k+1) - x_j(k+1)] \\ &\quad - 2[x_i(k) - x_j(k)] + [x_i(k-1) - x_j(k-1)]| \end{aligned}$$

C 型关联度。

$$D_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K D_{ij}(t_k)$$

其中

$$\begin{aligned} D_{ij}(t_k) &= [d_{ij}^{(0)}(t_k) + d_{ij}^{(1)}(t_k) + d_{ij}^{(2)}(t_k)]/3 \\ d_{ij}^{(0)} &= \frac{x_i(t_k)}{x_j(t_k)}, \quad d_{ij}^{(1)} = \frac{x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)}{x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k)} \\ d_{ij}^{(2)} &= \frac{x_i(t_{k+1}, t_k) - x_i(t_k, t_{k-1})}{x_j(t_{k+1}, t_k) - x_j(t_k, t_{k-1})} = \frac{x_i(t_{k+1}) - 2x_i(t_k) + x_i(t_{k-1}))}{x_j(t_{k+1}) - 2x_j(t_k) + x_j(t_{k-1}))} \end{aligned}$$

(7) 改进的关联度。

$$\gamma(x_0, x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\omega_{ij} c}{c + \tan(\beta_j/2)}$$

其中

$$\omega_{ij} = 1 - |\Delta x_{0i}(j)| / \sum_{k=1}^n |\Delta x_{0i}(k)|, \quad \Delta x_{0i}(j) = x_i(j) - x_0(j)$$

$$\beta_j = \arctan[(k_{ij} - k_{0j}) / (1 + k_{ij} k_{0j})], \quad \beta_j \in [0, \pi], \quad k_{ij} = x_i(j+1) - x_i(j)$$

通过以上各种灰色关联度的定义，我们可以看出，在这些灰色关联度的定义中，它们都是使用不同的方法来描述数据序列曲线之间的接近或相似程度的，由

于它们之间所使用的方法不同,因而它们所适用的范围、对象等也都不尽一致,有些只对时间序列适合,有些对于时间序列与指标序列都是适合的。

由于邓氏关联度是讨论数据序列之间的极差的,它所讨论的极差是数据序列之间的对应位置上的极差,所以它对于时间序列与指标序列都是适合的。但它不具备规范性与保序性。它的关联度大小还与分辨系数有关。

绝对关联度是考虑的曲线相对于始点 $x(1)$ 的折线变化而得到的灰色绝对关联度,既是把数据序列曲线的始点平移到坐标原点,然后考查它们之间的折线的接近程度。因此它只适合于时间序列,而对于指标序列无法作始点零象化生成。但对于时间序列来说,它的使用范围较广,它对等时距序列、非等时距序列以及序列中有多个空缺的情形均可适用,而且对于序列的时间长度不同的序列也可以计算它们之间的关联度。

由于相对关联度是对原始序列进行初值化生成后,计算初值化序列的灰色绝对关联度,由此可以看出,灰色绝对关联度是序列折线的绝对值的接近程度的,而灰色相对关联度是考察序列折线相对于始点的变化率的接近程度的。灰色相对关联度与灰色绝对关联度的计算方法相同,因此它们的适用序列的范围也相同,只是二者考察对象的出发点不同。

斜率关联度主要是考虑数据序列曲线之间的斜率的接近程度的,因此它要计算数据序列内部的斜率,它对于指标序列无法计算,因此它也只适合于时间序列。

同理,可以看出,对于T型关联度、B型关联度、C型关联度、改进的关联度也都是只适合于时间序列,对于指标序列无法应用。

注 如果想应用灰色绝对关联度、灰色相对关联度、灰色斜率关联度、T型关联度等来解决具有指标序列的关联分析,必须先对原始数据序列作无量纲化生成处理,或作 $[-1, 1]$ 线性生成处理。在作无量纲处理时,常用均值化生成、百分比生成。

6.4 灰色综合关联度

通过上面的分析和综合现有的关联度量化模型,我们大致可以把现有的关联度分为两类:一类仅强调了序列间的绝对位置差,如邓氏关联度、灰色绝对关联度、T型关联度等;一类仅强调了序列间的变化率,如B型关联度、斜率关联度等。基于对以上问题,能否建立一个既考虑数据序列的绝对变化又考虑数据序列的相对变化,综合现有的关联度量化模型,要克服这种缺陷,必须采取演变或综合集成的形式去构建关联度量化模型。同时还要克服关联度不满足整体性和规范性的缺陷,因此构建了一种满足既考虑数据序列的绝对变化又考虑数据序列的

相对变化,且满足灰色关联度四公理的关联度——灰色综合关联度。

6.4.1 灰色综合关联度

定义 6.4.1 设 $X_0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\}$ 为数据行为参考序列,

$$X_1 = \{x_1(1), x_1(2), \dots, x_1(n)\}$$

.....

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}$$

.....

$$X_m = \{x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(n)\}$$

为数据行为比较序列。

称

$$\begin{aligned} & \gamma_{0i}(x_0(k), x_i(k)) \\ &= \frac{1 + \xi \max_i \max_k |\Delta X_{0i}| + \eta \max_i \max_k |\Delta X'_{0i}|}{1 + \lambda_1 |\Delta X_{0i}| + \lambda_2 |\Delta X'_{0i}| + \xi \max_i \max_k |\Delta X_{0i}| + \eta \max_i \max_k |\Delta X'_{0i}|} \\ &= \frac{1 + \xi \max_i \max_k |\Delta x_{0i}(k)| + \eta \max_i \max_k |\Delta x'_{0i}(k)|}{1 + \lambda_1 |\Delta x_{0i}(k)| + \lambda_2 |\Delta x'_{0i}(k)| + \xi \max_i \max_k |\Delta x_{0i}(k)| + \eta \max_i \max_k |\Delta x'_{0i}(k)|} \end{aligned}$$

为关联系数,其中 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$; 其意义分别为对绝对位置差异和变化率差异的重视程度; ξ, η 分别是绝对位置差异和变化率差异的辨识系数。一般情况下,这几个参数均可取为 0.5。其中 $\Delta x_{0i}(k) = x_0(k) - x_i(k)$ 为序列间的绝对位置差异; $\Delta x'_{0i}(k) = x'_0(k) - x'_i(k)$ 为序列间的变化率差异; $x'_i(k) = x_i(k) - x_i(k-1)$ 为序列的变化率; 上述的 $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $k = 2, 3, \dots, m$ 。

称

$$\gamma_i = \gamma_{0i}(X_0, X_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_i(k)$$

为数据序列 X_0 与 X_i 的灰色综合关联度。

定理 6.4.1 按定义 6.4.1 所定义的灰色综合关联度满足关联度四公理。

证明 (1) 规范性。

易知: $0 < \gamma(X_0, X_i) \leq 1$, 又由于 $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, 对 $i = 0, 1, 2, \dots, n$, 考查:

$$\begin{aligned} \gamma(x_0(k), x_i(k)) = 1 & \Leftrightarrow |\Delta x'_{0i}(k)| = 0 \text{ 且 } |\Delta x_{0i}(k)| = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(k) - x_i(k) = 0, & k = 2, 3, \dots, m \\ x'_0(k) - x'_i(k) = 0 \Leftrightarrow x_0(k) - x_0(k-1) \\ & = x_i(k) - x_i(k-1) \end{cases} \quad \text{即 } 0 < \gamma(X_0, X_i) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_0(k) = x_i(k), k = 1, 2, \dots, m$$

且 $\gamma(X_0, X_i) = 1 \Leftrightarrow X_0 = X_i$ 。

(2) 整体性、偶对称性及接近性的证明在此略去。

综上所述,可以得到如下结论:

(1) 本模型既考查序列之间的绝对位置的相似性,又考查序列变化率的相似性,因此较全面地考查了几何相似性;

(2) 模型中的分辨系数 ξ, η , 仍然强调系统环境对灰色关联度的影响; λ_1, λ_2 可以理解为权重,分别表示对绝对位置差异和变化率差异的重视程度;

(3) 关联度的大小受参数 $\xi, \eta, \lambda_1, \lambda_2$ 的影响,但在同一 $\xi, \eta, \lambda_1, \lambda_2$ 取值下,运用综合关联度量模型不会影响关联序。

6.4.2 应用实例

我们利用灰色综合关联度对河南省农民人均年总收入及其收入结构的关联度进行了研究。根据河南省统计年鉴,1998~2002年河南省农民人均年总收入序列为

$$X_0 = \{2537.18, 2576.81, 2726.08, 2916.28, 3060.99\}$$

农民人均年总收入包括:工资性收入、第一产业收入、第二产业收入、第三产业收入、财产性收入以及转移性支付收入,分别记为 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 和 X_6 , 其中

$$X_1 = \{344.34, 408.30, 473.68, 517.63, 567.07\}$$

$$X_2 = \{1492.36, 1755.13, 1767.23, 1901.53, 1950.94\}$$

$$X_3 = \{73.33, 90.33, 95.85, 102.90, 116.34\}$$

$$X_4 = \{195.87, 225.24, 271.24, 271.93, 286.56\}$$

$$X_5 = \{22.62, 27.18, 29.15, 23.59, 32.45\}$$

$$X_6 = \{63.56, 70.61, 88.93, 98.69, 107.63\}$$

利用算例中所给的参数,以农民人均年总收入为系统特征序列,分别计算出强调变化率差异和强调绝对差异的关联度,见表 6.1。

表 6.1 农民收入的结构分析

强调内容	(λ_1, λ_2)	(ξ, η)	r_{01}	r_{02}	r_{03}	r_{04}	r_{05}	r_{06}
强调变化率差异	(0.1, 0.9)	(0.5, 0.5)	0.832	0.887	0.806	0.817	0.800	0.806
强调绝对差异	(0.9, 0.1)	(0.5, 0.5)	0.441	0.646	0.405	0.420	0.399	0.404

从表 6.1 中可以看出,农民人均年总收入不论是基于强调变化率还是强调绝对差,其与农民的第一产业收入的关联度都是最大的,说明农民的收入的变化主要受到第一产业收入变化的影响,因此,增加农民收入,首先要加强农业的基础地位,深化农业结构调整,努力提高农民在第一产业上的收入;其次,与农民人均年总收入关联度比较大的是农民的工资性收入,农民的工资性收入主要来自于农村剩余劳动力的转移,因此,提高农民收入一定要重视农村剩余劳动力的合理流动,尽量帮助农村剩余劳动力找到就业机会,大力发展乡镇企业。

6.5 灰色斜率关联度的改进及其算法

6.5.1 灰色斜率关联度的改进及其性质

邓氏关联度、灰色 B 型关联度、T 型关联度、广义关联度、灰色斜率关联度、灰色绝对关联度、C 型关联度等从不同的角度对关联度进行研究,都取得了一定的应用效果。但这些关联度大都与邓氏关联度类似,当两个时间数据序列在统计上存在着负相关关系时,按照它们定义的关联度进行计算,这时的灰色关联度大于零,说明它们之间在一定程度上存在相似的发展态势,显然与实际产生了矛盾。这主要是由于他们所定义的关联度不能反映正、负相关关系所造成的。有些文献虽然在这方面有所体现,但有一些缺陷。下面就针对灰色斜率关联度进行改进,并讨论它的一些性质。

为了克服以上灰色关联度的不足,对灰色关联度的计算给出一种新的设想。其基本思想为:按照因素时间序列曲线的平均相对变化态势的接近程度来计算灰色关联度。基于这种思想,改进的灰色斜率关联度的计算方法如下:

对于时间区间 $[a, b]$, $0 \leq a < b$, 令

$$\Delta t_k = [t_k, t_{k-1}], \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$[a, b] = \bigcup_{k=2}^n \Delta t_k, \quad \Delta t_k \cap \Delta t_{k-1} = \emptyset, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

因而有下面的定义:

定义 6.5.1 设系统特征函数为 $X(t) = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$, 系统行为函数为 $Y_i(t) = \{y_i(t_1), y_i(t_2), \dots, y_i(t_n)\}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 仍称

$$\xi_i(t) = \operatorname{sgn}(\Delta x(t) \cdot \Delta y_i(t)) \frac{1 + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right|}{1 + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right| + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} - \frac{1}{y_i} \cdot \frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t} \right|}$$

为 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 在 t 时刻的灰色斜率关联系数, 其中

$$\operatorname{sgn}(\Delta x(t) \cdot \Delta y(t)) = \begin{cases} 1, & \Delta x(t) \cdot \Delta y(t) \geq 0 \\ -1, & \Delta x(t) \cdot \Delta y(t) < 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t), \quad \Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$$

$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$ 为系统特征函数 $X(t)$ 在 t 到 $t + \Delta t$ 的斜率;

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i(t), \quad \Delta y_i(t) = y_i(t + \Delta t) - y_i(t)$$

$\frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t}$ 为系统行为函数 $Y_i(t)$ 在 t 到 $t + \Delta t$ 的斜率。

附注 1 当 $X(t)$, $Y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 皆为 1-时距的离散数据序列时, $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 在 t 时刻的灰色斜率关联系数公式可以简写为

$$\xi_i(t) = \operatorname{sgn}(\Delta x(t) \cdot \Delta y_i(t)) \frac{1 + \left| \frac{\Delta x(t)}{x} \right|}{1 + \left| \frac{\Delta x(t)}{x} \right| + \left| \frac{\Delta x(t)}{x} - \frac{\Delta y_i(t)}{y_i} \right|}$$

性质 6.5.1 任意的系统特征函数 $X(t)$ 与系统行为函数 $Y_i(t)$ 的灰色斜率关联系数满足

$$-1 < \xi_i(t) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

性质 6.5.2 灰色斜率关联系数 $\xi_i(t)$ 只与 $X(t)$, $Y_i(t)$ 的几何形状有关, 而与它们在空间的相对位置无关。

性质 6.5.3 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 的在 t 时刻的斜率越接近, 灰色斜率关联系数 $\xi_i(t)$ 就越大。

性质 6.5.4 当 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 在 t 到 $t + \Delta t$ 的变化率相同时, 它们的斜率相等, 这时 $\xi_i(t) = 1$ 。

定义 6.5.2 设 $X(t)$ 为系统特征函数, $Y_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, m$) 为系统行为函数, 称

$$\epsilon_i = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \xi_i(t)$$

为 $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 改进的灰色斜率关联度。

由上述定义可知, 灰色斜率关联系数反映了两曲线在某一点的平均变化率的一致程度, 而灰色斜率关联度则表示在整个区间上灰色斜率关联系数的平均值。

定理 6.5.1 灰色斜率关联度 ϵ_i 具有如下性质:

- (1) $-1 < \epsilon_i \leq 1$;
- (2) ϵ_i 只与 $X(t)$, $Y_i(t)$ 的变化率有关, 而与它们在空间的相对位置无关;

(3) $X(t)$ 与 $Y_i(t)$ 的平均变化率越接近, 则 ϵ_i 越大;

(4) ϵ_i 具有唯一性。

证明 (1) 由于 $-1 < \xi_i(t) \leq 1, i=1, 2, \dots, m$ 。所以

$$-1 < \epsilon_i = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \xi_i(t) \leq 1$$

由灰色斜率关联系数及灰色斜率关联度的定义, 性质 (2), (3), (4) 显然。

附注 2 (1) ϵ_i 的正负反映两个因素变量间的相关性质, $\epsilon_i > 0$ 表示正相关, 即 $X(t)$ 的增(减)将直接导致 $Y_i(t)$ 的增(减); $\epsilon_i < 0$ 表示负相关, 即 $X(t)$ 的增(减)将直接导致 $Y_i(t)$ 的减(增); $\epsilon_i = 1$ 表示两个因素变量完全相关。

(2) ϵ_i 不再是一个相对值, 而成为一个绝对值, 因而 ϵ_i 具有可比性。

定理 6.5.2 设原始数据序列均为非负数据序列, 若数据序列进行无量纲化生成 $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, 则改进的灰色斜率关联度与无量纲化生成方法无关。即经过初值化生成 d_1 、均值化生成 d_2 、百分比生成 d_3 、倍数生成 d_4 不改变改进的灰色斜率关联度的值。

证明 (1) 设对原始数据序列进行初值化生成 d_1 , 记生成后的数据序列为 X' 和 Y'_i , 由于

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x'(t) = \frac{1}{nx(1)} \sum_{t=1}^n x(t) = \frac{\bar{x}}{x(1)} \\ \Delta x'(t) &= x'(t + \Delta t) - x'(t) = \frac{\Delta x(t)}{x(1)} \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \bar{y}'_i &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y'_i(t) = \frac{\bar{y}_i}{y_i(1)}, \quad \Delta y'_i(t) = y'_i(t + \Delta t) - y'_i(t) = \frac{\Delta y_i(t)}{y_i(1)} \\ \xi'_i(t) &= \text{sgn}(\Delta x'(t), \Delta y'_i(t)) \cdot \frac{\left[1 + \left|\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x'(t)}{\Delta t}\right|\right]}{\left[1 + \left|\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x'(t)}{\Delta t}\right| + \left|\frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x'(t)}{\Delta t} - \frac{1}{y'_i} \cdot \frac{\Delta y'_i(t)}{\Delta t}\right|\right]} \\ &= \text{sgn}(\Delta x'(t), \Delta y'_i(t)) \cdot \frac{1 + \left[1 + \left|\frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right|\right]}{\left[1 + \left|\frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\right| + \left|\frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} - \frac{1}{y_i} \cdot \frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t}\right|\right]} \end{aligned}$$

由于 $\Delta x'(t) \cdot \Delta y'_i(t)$ 与 $\Delta x(t) \cdot \Delta y_i(t)$ 的符号相同, 因此

$$\text{sgn}(\Delta x(t), \Delta y_i(t)) = \text{sgn}(\Delta x'(t), \Delta y'_i(t))$$

故

$$\xi_i(t) = \xi'_i(t)$$

(2) 设对原始数据序列进行均值化生成 d_2 , 记生成后的数据序列为 X' 和 Y'_i ,

由于

$$\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'(t) = \frac{1}{nx} \sum_{i=1}^n x(t) = \frac{\bar{x}}{x} = 1$$

$$\Delta x'(t) = x'(t + \Delta t) - x'(t) = \frac{\Delta x(t)}{x}$$

同理可得

$$\bar{y}_i' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i'(t) = 1, \quad \Delta y_i'(t) = y_i'(t + \Delta t) - y_i'(t) = \frac{\Delta y_i(t)}{y}$$

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \text{sgn}(\Delta x'(t) \cdot \Delta y_i'(t)) \frac{1 + \left| \frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x'(t)}{\Delta t} \right|}{1 + \left| \frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x'(t)}{\Delta t} \right| + \left| \frac{1}{x'} \cdot \frac{\Delta x'(t)}{\Delta t} - \frac{1}{y_i} \cdot \frac{\Delta y_i'(t)}{\Delta t} \right|} \\ &= \text{sgn}(\Delta x'(t) \cdot \Delta y_i'(t)) \frac{1 + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right|}{1 + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \right| + \left| \frac{1}{x} \cdot \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} - \frac{1}{y_i} \cdot \frac{\Delta y_i(t)}{\Delta t} \right|} \end{aligned}$$

由于 $\Delta x'(t) \cdot \Delta y_i'(t)$ 与 $\Delta x(t) \cdot \Delta y_i(t)$ 的符号相同, 因此

$$\text{sgn}(\Delta x(t), \Delta y_i(t)) = \text{sgn}(\Delta x'(t), \Delta y_i'(t))$$

故

$$\xi_i(t) = \xi_i'(t)$$

(3) 同理可证, 对原始数据序列进行百分比生成 d_3 、倍数生成 d_4 也不改变改进的灰色斜率关联度的值。

6.5.2 灰色斜率关联度的应用

设已知 x_0 为参考数据序列, x_1, x_2, x_3 为比较数据序列, 其具体数据如下:

$$x_0 = \{1.0, 2.0, 2.5, 2.5, 3.0, 5.0, 6.0\}$$

$$x_1 = \{1.0, 1.8, 2.3, 2.4, 2.8, 4.8, 5.8\}$$

$$x_2 = \{1.0, 1.8, 2.3, 2.0, 3.0, 4.1, 5.7\}$$

$$x_3 = \{1.0, 2.2, 2.5, 2.1, 3.0, 4.1, 5.8\}$$

按邓氏关联度计算的灰色关联度为

$$r_{01} = 0.7542, \quad r_{02} = 0.6845, \quad r_{03} = 0.7544$$

故灰色关联序为

$$r_{03} > r_{01} > r_{02}$$

实际上, 由 x_0, x_1, x_2, x_3 发展态势的直观可知, x_1 与 x_0 的发展态势的

接近程度要比 x_2, x_3 的发展态势的接近程度更近些, 因此, 按邓氏关联度计算的结果与实际情况不一致。

按改进的灰色斜率关联度计算公式计算的结果为

$$\epsilon_{01} = 0.978315, \quad \epsilon_{02} = 0.905299, \quad \epsilon_{03} = 0.89295$$

灰色关联序为

$$\epsilon_{01} > \epsilon_{02} > \epsilon_{03}$$

此结果与数据序列的实际发展态势比较接近, 说明该方法比较客观、实用。

6.6 广义灰色绝对关联度模型的改进

灰关联度是通过数据序列的几何关系的相似程度来度量的, 我们要准确地给出曲线相似的定义, 并且要充分地利用曲线相似这一点来给出一个比较合理的灰色关联度的计算公式。刘思峰教授提出了广义灰色绝对关联度的计算, 其主要是研究的两个序列绝对增量间的关系, 用两条序列折线间所夹的面积大小来衡量两序列的关联性的, 是目前应用较多的一种关联度。

当系统行为序列 X_i^0 围绕系统特征序列 X_0^0 摆动, 且 X_i^0 位于 X_0^0 之上部分的面积与位于 X_0^0 之下的面积相等时灰色绝对关联度 $\epsilon_{0i} = 1$, 此时的关联度明显具有不合理性, 所以我们针对这种灰色绝对关联度的计算模型来进行研究和改进。

6.6.1 广义灰色绝对关联度模型的建立

设系统行为数据序列为

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

记折线

$$\{x_i(1) - x_0(1), x_i(2) - x_0(1), \dots, x_i(n) - x_0(1)\}$$

为 $X_i^0, i = 0, 1, 2, \dots, m$ 。令

$$s_i = \int_1^n X_i^0 dt, \quad |s_i - s_0| = \left| \int_1^n (X_i^0 - X_0^0) dt \right|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

则灰色绝对关联度为

$$\epsilon_{0i} = \frac{1 + |s_0| + |s_i|}{1 + |s_0| + |s_i| + |s_i - s_0|}$$

当 X_i^0 围绕 X_0^0 摆动, 且 X_i^0 位于 X_0^0 之上部分的面积与位于 X_0^0 之下的面积相等时 $\epsilon_{0i} = 1$, 此时的关联度明显具有不合理性, 所以我们针对这种灰色关联度的计算模型来进行研究和改进。

命题 6.6.1 设系统行为数据序列 $X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}$,

$i=0, 1, 2, \dots, m$ 。

记折线

$$\{x_i(1) - x_i(1), x_i(2) - x_i(1), \dots, x_i(n) - x_i(1)\}$$

为 X_i^0 。令

$$s_i = \int_1^n X_i^0 dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

则

- (1) 当 X_i 为增长序列时, $s_i \geq 0$;
- (2) 当 X_i 为衰减序列时, $s_i \leq 0$;
- (3) 当 X_i 为振荡序列时, s_i 符号不定。

命题 6.6.2 设系统行为数据序列,

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}$$

$$X_j = \{x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(n)\}$$

的始点零化象为

$$X_i^0 = \{x_i(1) - x_i(1), x_i(2) - x_i(1), \dots, x_i(n) - x_i(1)\}$$

$$X_j^0 = \{x_j(1) - x_j(1), x_j(2) - x_j(1), \dots, x_j(n) - x_j(1)\}$$

记

$$|s_i - s_j| = \left| \int (X_i^0(t) - X_j^0(t)) dt \right|$$

设两个始点零化象曲线除了始点 t_0 , 终点 t_n 以外还有 l 个交点, 交点记为 t_k ($k=1, 2, \dots, l$), 其中 l 为有限整数, 则

$$\begin{aligned} |s_i - s_j| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} X_i^0(t) - X_j^0(t) dt \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} X_i^0(t) - X_j^0(t) dt \right| + \dots \\ &\quad + \left| \int_{t_{l-1}}^{t_l} X_i^0(t) - X_j^0(t) dt \right| + \left| \int_{t_l}^{t_n} X_i^0(t) - X_j^0(t) dt \right| \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} X_i^0(t) - X_j^0(t) dt \right| + \left| \int_{t_l}^{t_n} X_i^0(t) - X_j^0(t) dt \right| \quad (6.6.1) \end{aligned}$$

式 (6.6.1) 中的 $t_k \in \mathbf{R}$, 则

- (1) 当 X_i^0 与 X_j^0 除了原点外无交点时,

$$|s_i - s_j| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} (x_i^0(k) - x_j^0(k)) + \frac{1}{2} (x_i^0(n) - x_j^0(n)) \right| \quad (6.6.2)$$

- (2) 当 X_i^0 与 X_j^0 除原点还有其他交点时, $|s_i - s_j|$ 不可以简化为式 (6.6.2) 的形式, 只能先求出两数据序列始点零化象曲线的交点, 然后代入式 (6.6.1) 来计算。

定义 6.6.1 设系统行为特征序列: $X_0 = \{x_0(k), k=1, 2, \dots, n\}$, 因素序列: $X_i = \{x_i(k), k=1, 2, \dots, n\} (i=1, 2, \dots, m)$ 。若 $x_i(k) = x_0(k) + b$ ($k=1, 2, \dots, n; b$ 为常数), 则称 X_i 与 X_0 完全相似。

性质 6.6.1 若因素数据序列 $X_i = \{x_i(k), k=1, 2, \dots, n\} (i=0, 1, 2, \dots, m)$ 与系统行为特征数据序列 $X_0 = \{x_0(k), k=1, 2, \dots, n\}$ 完全相似, 则它们的始点零化象序列相等, 即 $X_i^0 = X_0^0$ 。

定义 6.6.2 若灰关联度 ϵ_{0i} 满足 $0 < \epsilon_{0i} \leq 1$, 且 $\epsilon_{0i} = 1$ 充要条件是 $X_0 = \{x_0(k), k=1, 2, \dots, n\}$ 与 $X_i = \{x_i(k), k=1, 2, \dots, n\}$ 完全相似, 则称关联度 ϵ_{0i} 满足规范性。

定义 6.6.3 设 $X = \{X_i | i=1, 2, \dots, n\}$ 为一个序列集, $\forall X_i, X_j \in X$, 灰关联度满足: $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, 则称关联度满足对称性。

定义 6.6.4 $|s_0 - s_i|$ 越小, ϵ_{0i} 越大, 则称关联度满足接近性。

定义 6.6.5 设 X 为系统因素集, D 为灰关联算子集, $\forall d \in D$ 满足以上定义的规范性、对称性、接近性, 则称 (X, D) 为灰关联空间。

在上面改进的灰关联空间的基础之上, 我们来构造关联度的计算公式:

定义 6.6.6 设序列 $X_0 = \{x_0(k), k=1, 2, \dots, n\}$ 和 $X_i = \{x_i(k), k=1, 2, \dots, n\}$, s_0, s_i 如命题 6.6.1 所示, $|s_i - s_0|$ 如命题 6.6.2 所示, 则称

$$\epsilon_{0i} = \frac{1 + |s_0| + |s_i|}{1 + |s_0| + |s_i| + |s_i - s_0|}$$

为 X_0 与 X_i 的灰色关联度。

上面所构造的关联度计算公式满足如下性质。

- (1) 唯一性: 因为计算公式只与序列有关;
- (2) 规范性: 即 $0 < \epsilon_{0i} \leq 1$, 且 $\epsilon_{0i} = 1$ 充要条件是 $X_0 = \{x_0(k), k=1, 2, \dots, n\}$ 与 $X_i = \{x_i(k), k=1, 2, \dots, n\}$ 完全相似;
- (3) 对称性: 显然 $\epsilon_{0i} = \epsilon_{i0}$ 。

6.6.2 实例研究

例 6.6.1 已知 X_0 为参考序列, X_1, X_2, X_3 为比较序列, 其具体数据如下:

$$X_0 = \{3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 9.0\}, \quad X_1 = \{1.0, 2.5, 2.5, 4.0, 7.0\}$$

$$X_2 = \{1.0, 3.0, 4.0, 4.5, 8.0\}, \quad X_3 = \{1.0, 5.0, 4.0, 3.0, 3.5\}$$

我们先求出其始点零化象分别是

$$X_0^0 = \{0, 1.0, 2.0, 3.0, 6.0\}, \quad X_1^0 = \{0, 1.5, 1.5, 3.0, 6.0\}$$

$$X_2^0 = \{0, 2.0, 3.0, 3.5, 7.0\}, \quad X_3^0 = \{0, 4.0, 3.0, 2.0, 2.5\}$$

计算绝对关联度的结果为

$$\gamma_{01} = 1.0000, \quad \gamma_{02} = 0.8800, \quad \gamma_{03} = 0.9418$$

故灰色绝对关联序为: $X_1 > X_3 > X_2$ 。

由上面的关联度的计算结果,我们得到的结论是 X_0 与 X_1 的关联程度最高,从而它们的序列曲线最相似,而与 X_2 的序列曲线最不相似。但是由图 6.1 我们直观地从序列的发展势态来看, X_1 , X_2 与 X_0 都呈现出比较接近的稳步增长的势头,显然要比 X_3 与 X_0 更接近一些,另外,单从 X_1 与 X_0 两个序列的发展势态来看,其关联度为 1 也不是很合理。出现计算结果与定性分析结果不太一致的主要原因是:当遇到 X_i^0 围绕 X_0^0 摆动这种情况时,我们用原始的绝对关联度的计算公式来求关联度不是很合理, $|s_i - s_0|$ 中出现正负积分抵消掉一部分而造成的。

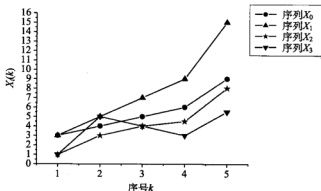


图 6.1 序列 X_i 的几何图形

下面我们再用改进的绝对关联度来计算一下,得到的绝对关联度为

$$\epsilon_{01} = 0.9655, \quad \epsilon_{02} = 0.8800, \quad \epsilon_{03} = 0.7642$$

故灰色绝对关联序为: $X_1 > X_2 > X_3$ 。

该结果与我们进行实际发展势态定性分析的结论基本吻合,说明改进的计算方法克服了原来计算式中的欠缺,从而使得计算出来的结果比较客观、合理、实用。

灰色绝对关联度从整体上把握曲线的相似,把离散的问题连续化,用积分的思想来解决,这种思路更适合于现实问题。因为不妨设我们研究的序列是时间序列,而时间是连续的,我们所收集到的数据只是它的发展过程中的某些离散点而已,所以,我们更应该从连续的角度来考虑问题。而且这种计算是建立在不改变序列形状的基础之上的,并且避免了像其他几种由各个对应点关联系数赋予权重相同而求平均得到的关联度,所以这样计算出来的结果不容易失真。因而我们就

在这种更具合理性的广义灰色关联度的基础之上作一些改进,克服了在前面所提到的问题,使得计算结果更加合理地体现了灰色关联度的实质:从序列曲线的相似程度来判定其数据序列间的联系紧密与否,两数据序列曲线之间所夹的面积越小,即两数据序列越相似,其关联度就越大,反之越小。

6.7 区间数关联度

在实际中经常会遇到区间数序列之间的因素分析,但已有的关联度都是定义在实数序列上的关联度,我们借鉴其他学者对关联度的研究成果,从灰色关联度分析的内涵入手,来研究区间数关联度。由于灰色关联度主要是刻画曲线几何形状的接近程度,因此我们首先在定义了区间数的距离,并研究了区间数距离的性质;在区间数距离的基础上,定义了区间数关联度,并研究了区间数关联度的性质。

6.7.1 区间数的距离

记 $\bar{a} = [a^L, a^U]$ ($a^L \leq a^U$), 称 $\bar{a}$ 为一个区间数。特别地, 若 $a^L = a^U$, 则 $\bar{a}$ 退化为一个实数。下面先给出区间数的运算法则:

设有两个区间数 $A = [a_1, a_2]$, $a_1 \leq a_2$, $B = [b_1, b_2]$, $b_1 \leq b_2$, 且 $k \geq 0$, 则

$$(1) A+B = [a_1+b_1, a_2+b_2];$$

$$(2) A-B = [a_1-b_1, a_2-b_2];$$

$$(3) kA = [ka_1, ka_2], \text{ 特别地, } k=0 \text{ 时, } kA=0.$$

定义 6.7.1 设 X, Y, Z 为区间数集中的点。若实数 $d(X, Y)$ 满足下列条件:

$$(1) d(X, Y) \geq 0, d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X=Y;$$

$$(2) d(X, Y) = d(Y, X);$$

$$(3) d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z),$$

则称 $d(X, Y)$ 为区间数集中的距离。

定义 6.7.2 设 $A = [a_1, a_2]$, $a_1 \leq a_2$, $B = [b_1, b_2]$, $b_1 \leq b_2$ 是两个区间数, 称

$$L(A, B) = \frac{1}{\sqrt[p]{2}} [(a_1 - b_1)^p + (a_2 - b_2)^p]^{\frac{1}{p}}$$

为区间数 A 与 B 的距离。

当 $p=1$ 时, 记 $L_1(A, B) = \frac{1}{2} [|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|]$, 称 $L_1(A, B)$ 为汉明距离,

当 $p=2$ 时, 记 $L_2(A, B) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{\frac{1}{2}}$, 称 $L_2(A, B)$ 为欧几里得距离。

当 B 点为实数轴原点 O 时, $L(A, O) = \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(a_1)^p + (a_2)^p]^{\frac{1}{p}}$, 称 $L(A, O)$ 为区间数 A 到原点 O 的距离。

当 A, B 都为实数时, 即 $a_1 = a_2, b_1 = b_2, L(A, B) = |a_1 - b_1| = d(A, B)$, $d(A, B)$ 表示实数 A 到 B 之间的距离。故区间数距离是实数距离的推广。

定理 6.7.1 设 A, B, C 为区间数集中的任意点, k 为任意实数, 则 $L(A, B)$ 满足以下性质:

- (1) $L(A, B) \geq 0 \Leftrightarrow A = B$ 时等式成立;
- (2) $L(A, B) = L(B, A)$;
- (3) $L(A, B) \leq L(A, C) + L(B, C)$;
- (4) $L(kA, kB) = kL(A, B)$ 。

证明 (1)、(2) 是显然的, 我们只证 (3) 和 (4)。

(3) 记 $A = [a_1, a_2]$, $a_1 \leq a_2$, $B = [b_1, b_2]$, $b_1 \leq b_2$, $C = [c_1, c_2]$, $c_1 \leq c_2$ 。由平面上任意三点之间距离的性质 (任意两边之和大于第三边), 可知下面的不等式成立:

$$[(a_1 - b_1)^p + (a_2 - b_2)^p]^{\frac{1}{p}} \leq [(a_1 - c_1)^p + (a_2 - c_2)^p]^{\frac{1}{p}} + [(b_1 - c_1)^p + (b_2 - c_2)^p]^{\frac{1}{p}}$$

对于区间数 A, B, C 它们之间的距离为

$$\begin{aligned} L(A, B) &= \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(a_1 - b_1)^p + (a_2 - b_2)^p]^{\frac{1}{p}} \\ L(A, C) + L(B, C) &= \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(a_1 - c_1)^p + (a_2 - c_2)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(b_1 - c_1)^p + (b_2 - c_2)^p]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

因而不等式成立

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(a_1 - b_1)^p + (a_2 - b_2)^p]^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(a_1 - c_1)^p + (a_2 - c_2)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt[p]{2}}[(b_1 - c_1)^p + (b_2 - c_2)^p]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

故

$$L(A, B) \leq L(A, C) + L(B, C)$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad L(kA, kB) &= \frac{1}{\sqrt[p]{2}} [(ka_1 - kb_1)^p + (ka_2 - kb_2)^p]^{\frac{1}{p}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[p]{2}} [k^p(a_1 - b_1)^p + k^p(a_2 - b_2)^p]^{\frac{1}{p}} \\
 &= \frac{k}{\sqrt[p]{2}} [(a_1 - b_1)^p + (a_2 - b_2)^p]^{\frac{1}{p}} = kL(A, B)
 \end{aligned}$$

故

$$L(kA, kB) = kL(A, B)$$

6.7.2 区间数关联度

6.7.2.1 区间数关联度定义

定义 6.7.3 设系统行为区间数序列为

$$X_0 = \{(x_{0L}(1), x_{0U}(1)), (x_{0L}(2), x_{0U}(2)), \dots, (x_{0L}(n), x_{0U}(n))\}$$

$$X_1 = \{(x_{1L}(1), x_{1U}(1)), (x_{1L}(2), x_{1U}(2)), \dots, (x_{1L}(n), x_{1U}(n))\}$$

$$X_2 = \{(x_{2L}(1), x_{2U}(1)), (x_{2L}(2), x_{2U}(2)), \dots, (x_{2L}(n), x_{2U}(n))\}$$

.....

$$X_m = \{(x_{mL}(1), x_{mU}(1)), (x_{mL}(2), x_{mU}(2)), \dots, (x_{mL}(n), x_{mU}(n))\}$$

称

$$\xi_{0i}(k) = \frac{\min_k \{L_{0i}(k)\} + \rho \max_k \{L_{0i}(k)\}}{L_{0i}(k) + \rho \max_k \{L_{0i}(k)\}}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

为 X_0 与 X_i 在 k 时刻的区间数关联系数。其中, $L_{0i}(k)$ 为点 $(x_{0L}(k), x_{0U}(k))$ 到点 $(x_{iL}(k), x_{iU}(k))$ 的距离, ρ 为分辨系数, $\rho \in [0, 1]$ 。

定义 6.7.4 令

$$\varepsilon_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{0i}(k)$$

称 ε_{0i} 为区间数序列 X_0 与 X_i 的区间数关联度。

若每个指标的重要程度不一样时, 我们可以通过 Delphi 调查法或 AHP 法确定了每个指标的权重向量, 设指标的权重向量为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

$$\varepsilon_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k \xi_{0i}(k)$$

我们称 ε_{0i} 为区间数序列 X_0 与 X_i 的区间数加权关联度。

定理 6.7.2 按上述定义的区间数关联度 ε_{0i} 具有以下性质:

(1) 规范性。

$$0 < \varepsilon_{0i} \leq 1$$

$$\varepsilon_{0i} = 1 \Leftrightarrow X_0 = X_i$$

(2) 整体性。对于区间数序列 X_i, X_j ($i, j = 1, 2, \dots, m$), $\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{often}}{\neq} \varepsilon_{ji}$, $i \neq j$ 。

(3) 偶对称性。

$$\varepsilon_{0i} = \varepsilon_{i0} \Leftrightarrow X = \{X_0, X_i\}$$

(4) 接近性。 $L_{0i}(k)$ 越小, ε_{0i} 越大。

证明 我们只证 (1) 规范性。

若 $L_{0i}(k) = \min_i \min_k \{L_{0i}(k)\}$, 则 $\xi_{0i}(k) = 1$ 。

若 $L_{0i}(k) \neq \min_i \min_k \{L_{0i}(k)\}$, 则 $L_{0i}(k) > \min_i \min_k \{L_{0i}(k)\}$ 。

$$\min_i \min_k \{L_{0i}(k)\} + \rho \max_i \max_k \{L_{0i}(k)\} \leq L_{0i}(k) + \rho \max_i \max_k \{L_{0i}(k)\}$$

所以

$$\xi_{0i}(k) < 1$$

而对任意的 k , $\xi_{0i}(k) > 0$, 故

$$0 < \xi_{0i}(k) \leq 1$$

所以

$$0 < \varepsilon_{0i} \leq 1$$

当 $\xi_{0i}(k) = 1 \Rightarrow X_0 = X_i \Rightarrow L_{0i}(k) = \min_i \min_k \{L_{0i}(k)\} \Rightarrow \varepsilon_{0i} = 1$ 。因此

$$\varepsilon_{0i} = 1 \Leftrightarrow X_0 = X_i$$

(2)、(3)、(4) 显然成立。

由于区间数距离是实数距离的推广, 因此当区间数序列中的分量都是实数时, 即 $x_{iL}(k) = x_{iU}(k)$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$), 此时, 区间数关联度就是邓氏关联度, 所以, 区间数关联度是邓氏关联度的推广。

6.7.2.2 区间数关联度的应用

设某市四家企业 S_1, S_2, S_3, S_4 的投资净产值率、投资利税率、内部收益率、环境污染程度的数据如下:

$$S_1 = \{[0.1940, 0.2857], [0.1304, 0.2647], [0.2069, 0.3098], [0.2311, 0.2491]\}$$

$$S_2 = \{[0.2470, 0.3510], [0.2609, 0.4412], [0.1839, 0.2817], [0.1960, 0.2102]\}$$

$$S_3 = \{[0.1720, 0.2597], [0.1848, 0.3382], [0.2814, 0.3239], [0.2813, 0.3057]\}$$

$$S_4 = \{[0.2151, 0.3120], [0.1630, 0.3088], [0.2059, 0.3098], [0.2537, 0.2747]\}$$

设系统的参考序列为

$$S_0 = \{[0.2470, 0.3510], [0.2609, 0.4412], [0.2814, 0.3239], [0.2813, 0.3057]\}$$

由此可计算出各企业与参考序列的区间数关联度为

$$\varepsilon_1 = 0.5305, \quad \varepsilon_2 = 0.7457, \quad \varepsilon_3 = 0.8547, \quad \varepsilon_4 = 0.6867$$

6.7.3 m 维区间数关联度

定义 6.7.5 设 $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$, 是两个 m 维区间数, 称

$$L(A, B) = \frac{1}{\sqrt[p]{m}} \left[\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

为 m 维区间数 A 与 B 的距离。

当 $p=1$ 时, 记 $L_1(A, B) = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m |a_i - b_i| \right]$, 称 $L_1(A, B)$ 为汉明距离。

当 $p=2$ 时, 记 $L_2(A, B) = \frac{1}{\sqrt{m}} \left[\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, 称 $L_2(A, B)$ 为欧几里得距离。

当 B 点为实数轴原点 O 时, $L(A, O) = \frac{1}{\sqrt[p]{m}} \left[\sum_{i=1}^m (a_i)^p \right]^{\frac{1}{p}}$, 称 $L(A, O)$ 为区间数 A 到原点 O 的距离。

当 A, B 都为实数时, 即 $a_i = a_j$, $b_i = b_j$, $L(A, B) = |a_1 - b_1| = d(A, B)$, $d(A, B)$ 表示实数 A 到 B 之间的距离。故 m 维区间数的距离是实数距离的推广。

定义 6.7.6 设系统行为 m 维区间数序列为

$$X_0 = \{x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n)\}$$

$$X_i = \{x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)\}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

其中

$$x_0(k) = \{x_{01}(k), x_{02}(k), \dots, x_{0m}(k)\}$$

$$x_i(k) = \{x_{i1}(k), x_{i2}(k), \dots, x_{im}(k)\}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

称

$$\xi_{0i}(k) = \frac{\min_k \{L_{0i}(k)\} + \rho \max_k \{L_{0i}(k)\}}{L_{0i}(k) + \rho \max_k \{L_{0i}(k)\}}, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

(6.7.1)

为 X_0 与 X_i 在 k 时刻的 m 维区间数关联系数。其中 $L_{0i}(k)$ 为点 $(x_{01}(k), x_{02}(k), \dots, x_{0m}(k))$ 到点 $(x_{i1}(k), x_{i2}(k), \dots, x_{im}(k))$ 的距离, ρ 为分辨系数, $\rho \in [0, 1]$ 。

定义 6.7.7 令

$$\varepsilon_{0i} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \xi_{0i}(k) \quad (6.7.2)$$

称 ε_{0i} 为 m 维区间数序列 X_0 与 X_i 的区间数关联度。

第7章 灰色聚类分析

灰色聚类分析一直是灰色系统理论应用较多的分析技术之一。按聚类对象划分,可将灰色聚类分为灰色关联聚类和灰色白化权函数聚类。灰色关联聚类主要用于同类因素的归并,以使复杂系统简化。通过灰色关联聚类,可以检查许多因素中是否有若干个因素关系十分密切,使我们既能用这些因素的综合平均指标或其中的某一个因素来代表这几个因素,又使信息不受严重损失。这是属于系统变量的删简问题。在进行大面积调研之前,通过典型抽样数据的灰色关联聚类,可以减少不必要变量的收集,以节省经费。灰色白化权函数聚类主要用于检查观测对象是否属于事先设定的不同类别,以便区别对待。本章主要研究灰色白化权函数聚类的方法与原理。

邓聚龙教授创立了灰色变权聚类方法;刘思峰教授提出了灰色定权聚类分析;肖新平提出了灰色最优聚类;许秀莉讨论了灰色聚类分析的改进措施;刘思峰还提出了基于三角白化权函数的灰色聚类分析;熊和金等讨论了灰色预测聚类问题;张岐山研究了灰色聚类分析结果灰性的测度。以上讨论从不同的方面对灰色聚类分析进行了研究,但他们最后的集结方法都是对灰色聚类系数向量的分量按最大原则进行集结的方法来判定聚类对象属于某一灰类,而在实际中,往往会遇到灰色聚类系数无显著性差异,当聚类系数无显著性差异时,以上学者的研究方法就无法判定聚类对象应属于何灰类。下面我们就对此进行讨论。

7.1 灰色综合聚类分析模型

7.1.1 灰色综合聚类模型的建立

定义 7.1.1 设有 n 个聚类对象, m 个聚类指标, s 个不同的灰类, 聚类对象 i 关于聚类指标 j 的指标值为 x_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$ 。 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \dots, m$; $k=1, 2, \dots, s$) 为聚类指标 j 关于 k 灰类的白化权函数。

(1) 设 λ_j^k 为 j 指标 k 子类临界值, 则称

$$\omega_j^k = \frac{\lambda_j^k}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^k}$$

为 j 指标 k 子类的权。称

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \cdot \omega_j^k$$

为对象 i 关于指标 k 灰类的灰色定权聚类系数。

(2) 若聚类指标 j 关于 k 灰类的聚类权与 k 无关, 即 ω_j ($j=1, 2, \dots, m$) 为聚类指标 j 的聚类权, 且 $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$, 则称

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \omega_j$$

为聚类对象 i 属于 k 灰类的灰色定权聚类系数。

定义 7.1.2 称 $\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^s)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为聚类对象 i 的聚类系数向量。称

$$\Sigma = (\sigma_i^k) = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^s \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_n^1 & \sigma_n^2 & \cdots & \sigma_n^s \end{bmatrix}$$

为灰色聚类系数矩阵。

定义 7.1.3 令 $\delta_i^k = \frac{\sigma_i^k}{\sum_{k=1}^s \sigma_i^k}$, 称 δ_i^k 为聚类对象 i 属于 k 灰类的归一化聚类

系数。

定义 7.1.4 称 $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^s)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为聚类对象 i 的归一化聚类系数向量。

称 $\Pi = (\delta_i^k) = \begin{bmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \cdots & \delta_1^s \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \cdots & \delta_2^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_n^1 & \delta_n^2 & \cdots & \delta_n^s \end{bmatrix}$ 为归一化聚类系数矩阵。

由上面的定义可以看出, 当聚类对象 i 的聚类系数向量 $\delta_i = (0, 0, \dots, 0, 1)$ 时, 对象 i 显然属于第 s 灰类; 对象 i 的聚类系数向量 $\delta_i = (1, 0, \dots, 0)$ 时, 对象 i 属于第一灰类。但当归一化聚类系数向量 $\delta_i = (i=1, 2, \dots, s)$ 之间的元素无显著性差异时, 我们无法判定对象 i 应该属于那一灰类。

定义 7.1.5 设有 n 个聚类对象, s 个不同灰类, 令 $\eta = (1, 2, \dots, s-1, s)^T$, 则称 $\omega_i = \delta_i \cdot \eta = \sum_{k=1}^s k \cdot \delta_i^k$ ($i=1, 2, \dots, n$) 为聚类对象 i 的综合聚类系数。

$\eta = (1, 2, \dots, s-1, s)^T$ 称为综合聚类系数的权向量。

定义 7.1.6 称

$$\pi = (\omega_i) = \begin{bmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \cdots & \delta_1^s \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \cdots & \delta_2^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_n^1 & \delta_n^2 & \cdots & \delta_n^s \end{bmatrix} (1, 2, \cdots, s-1, s)^T$$

为综合聚类系数向量。

命题 7.1.1 对于任意聚类对象 i 的综合聚类系数, 都有 $1 \leq \omega_i \leq s$, $i=1, 2, \cdots, n$ 。

证明 由于归一化聚类系数向量 $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \cdots, \delta_i^s)$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 的定义知, $0 \leq \delta_i^k \leq 1$, 对于任意聚类对象 i 的综合聚类系数 $\omega_i = \delta_i \cdot \eta$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 有

$$\begin{aligned} 1 &= (1, 0, \cdots, 0, 0)(1, 2, \cdots, s-1, s)^T \leq \omega_i \\ &= \delta_i \cdot \eta \leq (0, 0, \cdots, 0, 1)(1, 2, \cdots, s-1, s)^T = s \end{aligned}$$

故 $1 \leq \omega_i \leq s$ 。证毕。

由于聚类对象被分为 s 类, 而综合聚类系数 $1 \leq \omega_i \leq s$, 因此我们可以把综合聚类系数的取值范围分为 s 个互不相交的等长区间, 即 $\left[1, 1 + \frac{s-1}{s}\right)$, $\left[1 + \frac{s-1}{s}, 1 + \frac{2(s-1)}{s}\right)$, $\cdots$, $\left[1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1 + \frac{k(s-1)}{s}\right)$, $\cdots$, $\left[s - \frac{s-1}{s}, s\right]$ 。

定义 7.1.7 当聚类对象 i 的综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1 + \frac{k(s-1)}{s}\right)$ 时, 我们称聚类对象 i 属于第 k 灰类。

综上所述, 可得以下灰色综合聚类分析算法:

(1) 按照综合评价要求对评价对象划分为 s 个灰类, 给出聚类指标 j 关于 k 灰类的白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \cdots, m, k=1, 2, \cdots, s$);

(2) 根据定性分析结论确定每个指标的聚类权 ω_j , $j=1, 2, \cdots, m$;

(3) 根据 (1) 和 (2) 得出得白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \cdots, m, k=1, 2, \cdots, s$), 聚类权 ω_j , $j=1, 2, \cdots, m$ 以及对象 i 关于 j 指标的样本值 x_{ij} ($i=1, 2, \cdots, n, j=1, 2, \cdots, m$), 计算出对象 i 关于第 k 灰类的灰色聚类系数

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \omega_j$$

(4) 计算对象 i 关于灰类 k 的归一化聚类系数 δ_i^k , 其中

$$\delta_i^k = \frac{\sigma_i^k}{\sum_{k=1}^s \sigma_i^k}$$

(5) 根据归一化聚类系数向量 $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^s)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 和聚类系数的权向量 $\eta = (1, 2, \dots, s-1, s)^T$, 计算对象 i 的综合聚类系数 ω_i , 其中

$$\omega_i = \delta_i \cdot \eta = \sum_{k=1}^s k \cdot \delta_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(6) 把综合聚类系数的取值范围分为 s 个互不相交的等长区间, 即 $\left[1, 1 + \frac{s-1}{s}\right), \left[1 + \frac{s-1}{s}, 1 + \frac{2(s-1)}{s}\right), \dots, \left[s - \frac{s-1}{s}, s\right]$ 。

(7) 当综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1 + \frac{k(s-1)}{s}\right)$ 时, 判定对象 i 属于第 k 灰类。

(8) 结束。

7.1.2 实例分析

江苏省第二产业内部主导产业分析。首先选取感应度系数、影响力系数、收入弹性系数、增长率、劳动力综合就业系数作为江苏省第二产业内部主导产业选择的评价指标, 同时把第二产业划分为开采业、食品制造业、纺织业、服装及造纸业、石油化工业、机械制造及装备、城市公共事业、建筑业等八个部门。利用江苏省 1997 年的投入产出表及江苏省历年的统计年鉴, 运用灰色综合聚类分析模型对江苏省第二产业内部主导产业和辅助产业进行选择。

(1) 各部门的感应度系数及影响力系数、综合就业率由 1997 年江苏省投入产出表计算得出;

(2) 收入弹性、增长率由历年的统计年鉴计算得出 (具体计算结果在此略去)。

由于上述评价指标皆为无量纲指标。为了便于评价, 根据其在区域经济发展中的重要程度将第二产业内部各部门划分为三个不同的类型, 分别为主导产业、辅助产业和一般产业。通过 Delphi 调查确定了每个指标关于各个类型的白化权函数及其各指标在综合分析中的权重, 则感应度系数、影响力系数、收入弹性系数、增长率、劳动力综合就业系数的白化权函数分别为

$$f_1^1[0.6, 1.1, -, -], \quad f_1^2[0.5, 0.8, -, 1.1], \quad f_1^3[-, -, 0.4, 0.8]$$

$$f_2^1[0.7, 1.2, -, -], \quad f_2^2[0.7, 1, -, 1.3], \quad f_2^3[-, -, 0.6, 0.8]$$

$$f_3[1, 1.6, -, -], f_3^2[0.7, 1.1, -, 1.5], f_3^3[-, -, 0.5, 0.8]$$

$$f_4[9, 13, -, -], f_4^2[8, 10, -, 12], f_4^3[-, -, 7, 10]$$

$$f_5[0.7, 1.2, -, -], f_5^2[0.4, 0.8, -, 1.2], f_5^3[-, -, 0.1, 0.5]$$

它们的权重分别为: 0.14、0.14、0.24、0.24、0.24。利用计算软件计算可得各部门的评价结果如表 7.1 所示。

表 7.1 江苏省第二产业内部灰色综合聚类评价结果

名称	聚类系数 σ_i			归一化聚类系数 δ_i			综合聚类系数 ω_i
	主导产业	辅助产业	一般产业	主导产业	辅助产业	一般产业	
开采业	0.0718	0.2839	0.5494	0.0793	0.3136	0.6070	2.5277
食品制造业	0.1740	0.3859	0.5679	0.1543	0.3421	0.5035	2.3492
纺织业	0.2286	0.2392	0.4603	0.2463	0.2577	0.4959	2.249
服装及造纸业	0.3639	0.3764	0.2181	0.3797	0.3927	0.2275	1.8478
石油化工业	0.3888	0.1998	0.1717	0.5114	0.2627	0.2258	1.7145
机械制造及装备	0.5049	0.3505	0.0250	0.5734	0.3981	0.0283	1.4549
城市公共事业	0.1856	0.4117	0.0953	0.2679	0.5944	0.1375	1.8696
建筑业	0.5910	0.0095	0.2912	0.6627	0.0106	0.3266	1.6638

由于 $s=3$, 因此当灰色综合聚类系数在 $\left[1, 1+\frac{2}{3}\right)$ 内时, 该产业应属于主导产业, 当灰色综合聚类系数在 $\left[1+\frac{2}{3}, 1+\frac{4}{3}\right)$ 内时, 该产业应属于辅助产业, 当灰色综合聚类系数在 $\left[1+\frac{4}{3}, 3\right]$ 内时, 该产业应属于一般产业。由表 7.1 可知, 主导产业为机械制造及装备、建筑业; 辅助产业为石油化工业、城市公共事业、服装及造纸业、纺织业; 一般产业为食品制造业、开采业。

7.2 两阶段灰色聚类分析模型

7.2.1 两阶段灰色聚类分析模型的建立

定义 7.2.1 设归一化聚类系数向量 $\delta = (\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^n)$, 对归一化聚类系数向量中的元素按从大到小重新排列 $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(s)}$,

$$\delta^{(1)} \geq \delta^{(2)} \geq \dots \geq \delta^{(s)}$$

称 $\delta' = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(s)})$ 为顺序聚类系数向量。

定义 7.2.2 设聚类对象 i 的归一化聚类系数向量 $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n)$, 它的顺序聚类系数向量为 $\delta'_i = (\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}, \dots, \delta_i^{(s)})$, 令 $\theta_i = \delta_i^{(1)} - \delta_i^{(2)}$, 当 $\theta_i \leq \frac{1}{2s}$

时,我们称聚类对象 i 的聚类系数无显著性差异,否则称聚类对象 i 的聚类系数有显著性差异。并称 θ_i 为聚类对象的显著性差异系数。

定义 7.2.3 当聚类对象 i 的聚类系数有显著性差异时,即 $\theta_i > \frac{1}{2s}$,若 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_i^k\} = \delta_i^{k^*}$, 则称对象 i 属于灰类 k^* 。

定理 7.2.1 当聚类对象 i 的灰色归一化聚类系数无显著性差异时,即 $\delta_i^{(1)} - \delta_i^{(2)} = \theta_i \leq \frac{1}{2s}$, 并且灰色归一化聚类系数向量按最大原则进行聚类,即 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_i^k\} = \delta_i^{k^*}$ 时,判定对象 i 属于 k^* 灰类,则每一类的综合聚类系数取值的最大区间长度为 $0.5(s-1)$ 。

证明 由于归一化聚类系数向量 $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^s)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的定义知, $0 \leq \delta_i^k \leq 1$, 若聚类对象 i 属于第 k 类,由于聚类对象 i 的灰色综合聚类系数无显著性差异,因此聚类对象 i 的灰色综合聚类系数 $\omega_i = \delta_i \cdot \eta$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的最大值应趋近于 $(0, 0, \dots, 0.5, 0, \dots, 0, 0.5)$ ($1, 2, \dots, s-1, s$)^T $= 0.5(k+s)$ (即归一化聚类系数向量 δ_i 中的第 k 个与第 s 个分量为 0.5, 其余的分量全为零)。聚类对象 i 的灰色综合聚类系数最小值应趋近于 $(0.5, 0, \dots, 0.5, 0, \dots, 0)$ ($1, 2, \dots, s-1, s$)^T $= 0.5(1+k)$ (即其中归一化聚类系数向量 δ_i 中的第 k 个与第 1 个分量为 0.5, 其余的分量全为零), 则聚类对象 i 属于第 k 灰类的灰色综合聚类系数的取值区间长度最大应为 $\Delta = 0.5(k+s) - 0.5(1+k) = 0.5(s-1)$ 。由于 i, k 的任意性知,对于任一灰类的灰色综合聚类系数取值的最大区间长度为 $0.5(s-1)$ 。

由于聚类对象 i 被分为 s 灰类,而灰色综合聚类系数 $1 \leq \omega_i \leq s$, 因此我们可以把灰色综合聚类系数的取值范围平均分为 s 个互不相交的等长区间,即 $\left[1, 1 + \frac{s-1}{s}\right), \left[1 + \frac{s-1}{s}, 1 + \frac{2(s-1)}{s}\right), \dots, \left[1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1 + \frac{k(s-1)}{s}\right), \dots, \left[s - \frac{s-1}{s}, s\right]$ 。

定义 7.2.4 当聚类对象 i 的聚类系数无显著性差异时,即 $\delta_i^{(1)} - \delta_i^{(2)} = \theta_i \leq \frac{1}{2s}$ 。若对象 i 的综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1 + \frac{k(s-1)}{s}\right)$ 时,称对象 i 属于第 k 灰类。当聚类对象 i 的聚类系数有显著性差异时,即 $\theta_i = \delta_i^{(1)} - \delta_i^{(2)} > \frac{1}{2s}$, 灰色归一化聚类系数按最大原则进行聚类。这种分析方法我们称为两阶段灰色聚类分析法。

综上所述,两阶段灰色聚类分析法的算法如下:

(1) 按照综合评价要求把聚类对象 i 划分 s 个灰类, 给出聚类指标 j 关于 k 灰类的白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, s$)。

(2) 根据定性分析结论确定每个指标的聚类权 $\omega_j, j=1, 2, \dots, m$ 。

(3) 根据第一步和第二步得出白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, s$), 及各指标的权重 $\omega_j, j=1, 2, \dots, m$ 以及对象 i 关于 j 指标的样本值 x_{ij} ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$), 计算出对象 i 关于第 k 灰类的聚类系数

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \omega_j$$

(4) 计算聚类对象 i 的归一化聚类系数向量 $\delta_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^s)$ ($i=1, 2, \dots, n$)。

(5) 计算顺序聚类系数向量 $\delta' = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(s)})$ 及显著性差异系数 θ , 判定对象 i 的归一化聚类系数有无显著性差异, 若聚类对象 i 的归一化聚类系数有显著性差异, 即 $\theta_i > \frac{1}{2s}$, 当 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_i^k\} = \delta_i^{k^*}$ 时, 则判定对象 i 属于灰类 k^* , 转 (9); 否则转 (6)。

(6) 若聚类对象 i 的归一化聚类系数无显著性差异, 即 $\theta_i \leq \frac{1}{2s}$, 根据归一化聚类系数向量 δ_i 和聚类系数的权向量 $\eta = (1, 2, \dots, s-1, s)^T$, 计算对象 i 的综合聚类系数 ω_i , 其中 $\omega_i = \delta_i \cdot \eta, i=1, 2, \dots, n$ 。

(7) 把综合聚类系数的取值范围分为 s 个互不相交的等长区间, 即 $\left[1, 1+\frac{s-1}{s}\right), \left[1+\frac{s-1}{s}, 1+\frac{2(s-1)}{s}\right), \dots, \left[s-\frac{s-1}{s}, s\right]$ 。

(8) 当综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1+\frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1+\frac{k(s-1)}{s}\right)$ 时, 判定对象 i 属于第 k 灰类。

(9) 结束。

7.2.2 实例分析

根据 7.1 节的实例, 计算出江苏省第二产业内部的聚类系数与综合聚类系数, 具体计算结果如表 7.2 所示。

计算显著性差异系数 θ_i , 由于 $s=3$, 因此显著性差异系数 $\theta = \frac{1}{6}$ 。若聚类对象 i 的聚类系数无显著性差异时, 即 $\theta_i \leq \frac{1}{2s} = \frac{1}{6}$, 计算对象 i 的综合聚类系数 ω_i , 并判断对象 i 应属于何类。当灰色综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1, 1+\frac{2}{3}\right)$ 时, 该产业

表 7.2 江苏省第二产业内部两阶段聚类评价结果

名称	聚类系数 δ_i^*			归一化聚类系数 δ_i^*			θ	max	综合 聚类 系数 ω_i	聚类 结果
	主导 产业	辅助 产业	一般 产业	主导 产业	辅助 产业	一般 产业				
开采业	0.0718	0.2839	0.5494	0.0793	0.3136	0.6070	0.2934	0.6070	2.3492	一般产业
食品制造业	0.1740	0.3859	0.5679	0.1543	0.3421	0.5035	0.1614			一般产业
纺织业	0.2286	0.2392	0.4603	0.2463	0.2577	0.4959	0.2382	0.4959		一般产业
服装及造纸业	0.3639	0.3764	0.2181	0.3797	0.3927	0.2275	0.0130		1.8478	辅助产业
石油化工业	0.3888	0.1998	0.1717	0.5114	0.2627	0.2258	0.2487	0.5114		主导产业
机械制造及 装备	0.5049	0.3505	0.0250	0.5734	0.3981	0.0283	0.1753	0.5734		主导产业
城市公共事业	0.1856	0.4117	0.0953	0.2679	0.5944	0.1375	0.3265	0.5944		辅助产业
建筑业	0.5910	0.0095	0.2912	0.6627	0.0106	0.3266	0.3363	0.6627		主导产业

应属于主导产业；当灰色综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1 + \frac{2}{3}, 1 + \frac{4}{3}\right)$ 时，该产业应属于辅助产业；当灰色综合聚类系数 $\omega_i \in \left[1 + \frac{4}{3}, 3\right]$ 时，该产业应属于一般产业。

若聚类对象 i 的聚类系数有显著性差异时，即 $\theta_i > \frac{1}{2s} = \frac{1}{6}$ ，按最大原则，判断对象 i 应属于何类，即 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_i^k\} = \delta_i^{k^*}$ 时，则判定聚类对象 i 属于灰类 k^* 。具体计算结果如表 7.2 所示。

由表 7.2 可知，主导产业为石油化工业、机械制造及装备、建筑业；辅助产业为城市公共事业、服装及造纸业；一般产业为开采业、食品制造业、纺织业。

7.3 两种灰色聚类方法结果一致性研究

在前面关于一般聚类分析方法与综合聚类分析方法分析的基础上，下面讨论这两种分析方法的结果一致性的条件。

7.3.1 两种灰色聚类分析方法的一致性条件

定理 7.3.1 当聚类对象的显著性差异系数大于 $1 - \frac{2}{s}$ 时，则综合聚类分析法与一般聚类分析法所得结果是一致的。

证明 由于聚类对象的显著性差异系数 $\theta = \delta^{(1)} - \delta^{(2)}$ 。

按一般聚类分析法, 若聚类对象 i 属于第 k 类, 则 $\delta_i^k = \max_{1 \leq j \leq s} \delta_i^j$, 由于

$\sum_{k=1}^s \delta_i^k = 1$, 综合聚类系数 $\omega_i = \delta_i \cdot \eta = \sum_{k=1}^s k \cdot \delta_i^k$, 因此, 要使 ω_i 最小, 只有当 $\delta_i = (\delta_i^1, 0, \dots, \delta_i^s, 0, \dots, 0)$, 并且 $\delta_i^s - \delta_i^1$ 最小时, ω_i 才能达到最小。由于聚类对象 i 属于第 k 灰类, 所以有不等式方程组

$$\begin{cases} \delta_i^1 + \delta_i^s = 1 \\ \delta_i^s - \delta_i^1 \geq \theta_1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \delta_i^1 \leq \frac{1-\theta_1}{2}, \\ \delta_i^s \geq \frac{1+\theta_1}{2}, \end{cases} \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1$$

因此

$$\omega_i = \delta_i^s - \delta_i^1 \geq \frac{1-\theta_1}{2} + k \cdot \frac{1+\theta_1}{2}$$

由于聚类对象 i 属于第 k 类, 则 $\omega_i \in \left[1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}, 1 + \frac{k(s-1)}{s} \right)$, 故

$$\omega_i \geq \frac{1-\theta_1}{2} + k \cdot \frac{1+\theta_1}{2} \geq 1 + \frac{(k-1)(s-1)}{s}$$

解得

$$\theta_1 \geq 1 - \frac{2}{s}$$

要使 ω_i 最大, 只有 $\delta_i = (0, \dots, \delta_i^k, 0, \dots, 0, \delta_i^s)$, 并且 $\delta_i^s - \delta_i^k$ 最小。由于聚类对象 i 属于第 k 灰类, 此时有不等式方程组

$$\begin{cases} \delta_i^k + \delta_i^s = 1 \\ \delta_i^s - \delta_i^k \geq \theta_2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \delta_i^k \leq \frac{1-\theta_2}{2} \\ \delta_i^s \geq \frac{1+\theta_2}{2} \end{cases}$$

所以

$$\omega_i \leq k \cdot \frac{1+\theta_2}{2} + s \cdot \frac{1-\theta_2}{2}$$

得

$$\omega_i \leq k \cdot \frac{1+\theta_2}{2} + s \cdot \frac{1-\theta_2}{2} \leq 1 + \frac{k(s-1)}{s}$$

解得

$$\theta_2 \geq 1 - \frac{2}{s}$$

因此当显著差异系数 $\theta \geq 1 - \frac{2}{s}$ 时, 综合聚类方法与一般聚类方法的聚类结果是相同的。

由定理 7.3.1 可以看出, 当显著性差异系数 $\theta \geq 1 - \frac{2}{s}$ 时, 综合聚类方法与一般聚类方法的聚类结果是相同的; 但定理 7.3.1 的逆并不一定成立, 即当综合聚类方法与一般聚类方法的聚类结果相同时, 聚类系数的显著性差异系数 θ 不一定大于 $1 - \frac{2}{s}$ 。

7.3.2 实例分析

通过前两节关于江苏省第二产业内部主导产业选择的讨论, 利用计算软件分别利用综合聚类方法与一般聚类方法计算出江苏省第二产业内部主导产业选择结果, 具体结果如表 7.3、表 7.4 所示。

表 7.3 综合聚类方法对江苏省第二产业内部主导产业选择的结果

名称	聚类系数 ω_i			归一化聚类系数 ω_i^*			θ	ω_i	综合法的聚类结果
	主导产业	辅助产业	一般产业	主导产业	辅助产业	一般产业			
开采业	0.072	0.284	0.549	0.079	0.314	0.607	0.293	2.528	一般产业
食品制造业	0.174	0.386	0.568	0.154	0.342	0.504	0.162	2.349	一般产业
纺织业	0.229	0.239	0.460	0.246	0.258	0.496	0.238	2.249	辅助产业
服装及造纸业	0.364	0.376	0.218	0.379	0.393	0.228	0.014	1.848	辅助产业
石油化工业	0.389	0.199	0.172	0.511	0.263	0.226	0.248	1.715	辅助产业
机械制造及装备	0.505	0.351	0.025	0.573	0.399	0.029	0.174	1.455	主导产业
城市公共事业	0.177	0.442	0.095	0.248	0.619	0.133	0.371	1.885	辅助产业
建筑业	0.591	0.010	0.291	0.663	0.011	0.327	0.336	1.664	主导产业

表 7.4 一般聚类方法对江苏省第二产业内部主导产业选择的结果

名称	聚类系数 σ_i			归一化聚类系数 σ_i^*			θ	max	一般法的 聚类结果
	主导 产业	辅助 产业	一般 产业	主导 产业	辅助 产业	一般 产业			
开采业	0.072	0.284	0.549	0.079	0.314	0.607	0.293	0.607	一般产业
食品制造业	0.174	0.386	0.568	0.154	0.342	0.504	0.162	0.504	一般产业
纺织业	0.229	0.239	0.460	0.246	0.258	0.496	0.238	0.496	一般产业
服装及造纸业	0.364	0.376	0.218	0.379	0.393	0.228	0.014	0.393	辅助产业
石油化工业	0.389	0.199	0.172	0.511	0.263	0.226	0.248	0.511	主导产业
机械制造及装备	0.505	0.351	0.025	0.573	0.399	0.029	0.174	0.573	主导产业
城市公共事业	0.177	0.442	0.095	0.248	0.619	0.133	0.371	0.619	辅助产业
建筑业	0.591	0.010	0.291	0.663	0.011	0.327	0.336	0.663	主导产业

对于综合聚类方法, 由于 $s=3$, 因此当灰色综合聚类系数在 $[1, 1+2/3]$ 内时, 该产业应属于主导产业, 当灰色综合聚类系数在 $[1+2/3, 1+4/3]$ 内时, 该产业应属于辅助产业, 当灰色综合聚类系数在 $[1+4/3, 3]$ 内时, 该产业应属于一般产业。由表 7.3 可知, 机械制造及装备、建筑业为主导产业; 石油化工业、城市公共事业、服装及造纸业、纺织业为辅助产业; 食品制造业、开采业为一般产业。

对于一般聚类方法, 当 $\max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_i^k\} = \sigma_i^*$ 时, 称对象 i 属于灰类 k^* 。由表 7.3 可知, 机械制造及装备、建筑业、石油化工业为主导产业; 城市公共事业、服装及造纸业为辅助产业; 食品制造业、开采业、纺织业为一般产业。

由表 7.3、表 7.4 可以看出, 两种方法所得结果有一些差异, 但当 $\theta \geq \frac{1}{3}$ 时, 所得结果是相同的。如城市公共事业、建筑业的显著差异系数为 $\theta \geq 0.336$, 两种聚类方法对它的聚类结果是相同的。

7.4 白化权函数分类区分度的变权灰色聚类

邓聚龙教授提出的灰色变权聚类方法是利用白化权函数检查观测对象是否属于事先设定的不同类别, 并直接根据白化权函数的折算系数确定指标权重, 最后计算折算白化值的全局和并据此进行归类。但是, 当聚类指标的意义、量纲不同, 且在数量上悬殊较大时, 采用变权聚类方法可能导致某些指标参与聚类的作用十分微弱。为了解决这一问题, 不同学者提出了各种解决的方法。值得注意的是, 一般学者们是对不同的聚类对象采用统一的公共权重(主观赋权或客观赋权)对综合聚类系数进行分类。然而, 指标的分类权重与指标的重要性权重之间

存在着重要的区别。我们这里所涉及的权重是针对聚类对象的分类而设置的,因而对于不同的对象不具有通用性,也不适合仅仅由专家主观拟定,这是与一般综合评价与决策中的重要性权重不同的地方。

我们认为用于灰色聚类的指标权重应该和聚类对象自身的样本数据有关,同时也应符合专家的经验。

7.4.1 白化权函数的分类区分度

由于白化权函数是根据专家的经验主观拟定的,因而对于 p 个灰类,并不一定满足 $\sum_{k=1}^p f_j^k(x_{ij}) = 1$ 。为了进一步分析指标白化权函数对区分对象类别所作的贡献,我们将样本观测值 x_{ij} 使对象 i 隶属于 S_k ($k=1, 2, \dots, p$) 类的隶属测度函数定义为

$$\mu_j^k(x_{ij}) = \frac{f_j^k(x_{ij})}{\sum_{k=1}^p f_j^k(x_{ij})}$$

显然, $0 \leq \mu_j^k(x_{ij}) \leq 1$, 且 $\sum_{k=1}^p \mu_j^k(x_{ij}) = 1$ 。

若 $\mu_j^k(x_{ij}) = \frac{1}{p}$ ($k=1, 2, \dots, p$), 则观测值 x_{ij} 使对象 i 隶属于 $S_1, S_2, \dots, S_p$ 类的测度相等, 也就是说, 指标 I_j 对区分对象 i 类别未作贡献。若 $\mu_j^{k'}(x_{ij}) = 1$, $k' \in \{1, 2, \dots, p\}$, 这时观测值 x_{ij} 使对象 i 确定地属于某一类, 说明指标 I_j 对于确定对象 i 所属的类别作了最大贡献。同理可以说明, 分类隶属测度 $\mu_j^k(x_{ij})$ ($k=1, 2, \dots, p$) 中的分量取值越分散, 则指标 I_j 对区分对象 i 的类别贡献越小, 取值越集中则贡献越大。我们知道, 信息熵可以反映这种分散程度, 因此, 我们可以通过白化权函数分类信息熵来定义指标 I_j 的白化权函数关于对象 i 的分类区分度。

定义 7.4.1 设样本观测值 x_{ij} 使对象 i 隶属于 $S_1, S_2, \dots, S_p$ 类的隶属测度向量为 $\mu_j^1(x_{ij}), \mu_j^2(x_{ij}), \dots, \mu_j^p(x_{ij})$, 则称

$$(1) E_j = -\frac{1}{\lg p} \sum_{k=1}^p \mu_j^k(x_{ij}) \cdot \lg \mu_j^k(x_{ij})$$

为白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ 关于对象 i 的分类信息熵。

$$(2) r_j(x_{ij}) = 1 + \frac{1}{\lg p} \sum_{k=1}^p \mu_j^k(x_{ij}) \cdot \lg \mu_j^k(x_{ij})$$

为白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ 关于对象 i 的分类区分度。

根据信息熵的基本性质, 我们很容易得到有关分类区分度的下列命题:

命题 7.4.1 白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ 关于对象 i 的分类区分度满足:

$0 \leq r_j(x_{ij}) \leq 1$, 当且仅当 $\mu_j^k(x_{ij}) = \frac{1}{p}$ ($k=1, 2, \dots, p$) 时, $r_j(x_{ij})$ 取最小值 0; 当且仅当 $\mu_j^{k'}(x_{ij}) = 1$, $k' \in \{1, 2, \dots, p\}$, $\mu_j^k(x_{ij}) = 0$, $k' \neq k$ 时, $r_j(x_{ij})$ 取最大值 1。

如果某个指标的分类信息熵越小, 表明分类隶属测度值越集中, 该指标为对象 i 的分类提供的信息量越多, 从而分类区分度就越大。反之, 如果某个指标的分类信息熵越大, 表明分类隶属测度值越分散, 该指标为对象 i 的分类提供的信息量越少, 从而分类区分度就越小。

7.4.2 基于白化权函数区分度的灰色变权聚类

定义 7.4.2 设聚类对象集合为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 聚类指标集合 $I = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$, 灰类集合为 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$, 依据 I_j 指标 S_k 子类的白化权函数和对对象 i 关于指标 I_j 的观测值 x_{ij} 确定聚类指标的权重, 进一步计算对象 i 隶属于 S_k 灰类的综合隶属测度信息, 并据此将对象 i 归入灰类 S_k 的过程, 称为灰色变权聚类。

定义 7.4.3 设 $r_j(x_{ij})$ 为指标 I_j 关于对象 i 的分类区分度, 则称

$$\eta_{ij} = \frac{r_j(x_{ij})}{\sum_{j=1}^m r_j(x_{ij})}$$

为指标 I_j 关于对象 i 的分类权重。显然, $0 \leq \eta_{ij} \leq 1$, 且 $\sum_{j=1}^m \eta_{ij} = 1$ 。

与重要性权重的意义有所不同, 这里的分类权重的含义是指标 I_j 对区分对象 i 属于哪一类所作贡献的大小。指标 I_j 对区分对象 i 类别的贡献越大, 则分类权重 η_{ij} 越大; 反之贡献越小, 则权重越小。当 $\eta_{ij} = 0$ 时, 指标 I_j 无法区分对象 i 的类别, 说明该指标对于分类不起任何作用, 完全可以删掉。另外, 上述权重的定义表明, 分类权重 η_{ij} 是针对对象 i 这个特定个体而言的, 关于不同聚类对象的分类权重是可以不相同的。

可见, 对于分类来说, 真正有效的隶属测度应该是 $\eta_{ij}\mu_j^k(x_{ij})$, 为了作进一步分析, 下面我们将隶属测度 $\mu_j^k(x_{ij})$ 作以下分解:

$$\mu_j^k(x_{ij}) = \eta_{ij}\mu_j^k(x_{ij}) + (1 - \eta_{ij})\mu_j^k(x_{ij})$$

当 $\eta_{ij} = 0$ 时, $\eta_{ij}\mu_j^k(x_{ij}) = 0$, 即隶属测度 $\mu_j^k(x_{ij})$ 中能区分开对象 i 所属类别的那部分测度为零;

当 $\eta_{ij} = 1$ 时, $\eta_{ij}\mu_j^k(x_{ij}) = \mu_j^k(x_{ij})$, 即隶属测度 $\mu_j^k(x_{ij})$ 完全能够区分开对象 i 所属类别;

当 $0 < \eta_{ij} < 1$ 时, $\eta_{ij}\mu_j^k(x_{ij})$ 是指标 I_j 的观测值 x_{ij} 提供的使对象 i 隶属于 S_k

灰类的有效测度。

由于 $0 \leq \eta_{ij} \leq 1$, $0 \leq \mu_j^k(x_{ij}) \leq 1$, 且 $\sum_{j=1}^m \eta_{ij} = 1$, $\sum_{k=1}^p \mu_j^k(x_{ij}) = 1$, 所以

$$0 \leq \sum_{j=1}^m \eta_{ij} \mu_j^k(x_{ij}) \leq 1, \quad \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^m \eta_{ij} \mu_j^k(x_{ij}) = \sum_{j=1}^m \eta_{ij} \sum_{k=1}^p \mu_j^k(x_{ij}) = \sum_{j=1}^m \eta_{ij} = 1$$

可见, $\sum_{j=1}^m \eta_{ij} \mu_j^k(x_{ij})$ 是所有 m 个指标提供的使对象 i 隶属于 S_k 灰类的综合隶属测度信息。

定义 7.4.4 设 x_{ij} 为对象 i 关于指标 I_j 的观测值, $\mu_j^k(\cdot)$ 为样本观测值 x_{ij} 使对象 i 隶属于 S_k ($k=1, 2, \dots, p$) 灰类的隶属测度函数, η_{ij} 为指标 I_j 关于对象 i 的分类权重, 则称

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m \mu_j^k(x_{ij}) \cdot \eta_{ij}$$

为对象 i 关于 S_k 灰类的灰色变权聚类系数。

定义 7.4.5 (1) 称

$$\sigma_i = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^p) = \left(\sum_{j=1}^m \mu_j^1(x_{ij}) \cdot \eta_{ij}, \sum_{j=1}^m \mu_j^2(x_{ij}) \cdot \eta_{ij}, \dots, \sum_{j=1}^m \mu_j^p(x_{ij}) \cdot \eta_{ij} \right)$$

为对象 i 的变权聚类系数向量。

(2) 称

$$\Sigma = (\sigma_i^k) = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^p \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_n^1 & \sigma_n^2 & \cdots & \sigma_n^p \end{bmatrix}$$

为灰色变权聚类系数矩阵。

若 $\max_{1 \leq k \leq p} \{\sigma_i^k\} = \sigma_i^{k^*}$, 则可判定对象 i 属于灰类 S_{k^*} 。

综上所述, 基于分类区分度的灰色变权聚类算法如下:

第一步: 通过专家调查法, 拟定聚类指标 j 关于 k 灰类的白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, p$);

第二步: 根据白化权函数 $f_j^k(\cdot)$, 计算对象 i 隶属于 S_k 类的隶属测度 $\mu_j^k(x_{ij})$ ($j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, p$), 并进一步计算指标 I_j 关于对象 i 的分类区分度;

第三步: 由分类区分度确定对象 i 关于指标 I_j 的分类权重 η_{ij} ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$);

第四步: 根据第二步得出的隶属测度 $\mu_j^k(x_{ij})$ 和第三步的分类权重 η_{ij} , 计算

出对象 i 关于灰类 S_k 的灰色变权聚类系数 σ_i^k ;

第五步: 若 $\max_{1 \leq k \leq p} \{\sigma_i^k\} = \sigma_i^{k^*}$, 则判定对象 i 属于灰类 S_{k^*} 。

7.4.3 实例分析

某煤矿可以采用 4 种不同的采煤方法, 即综采、高档普采、普采以及炮采 4 种方法, 以工作面单产 (万吨/(月·面))、回采工效 (吨/工)、设备投资 (万元) 以及回采成本 (元/吨) 作为聚类决策指标; 按好、较好、差三类进行聚类, 每个聚类对象关于各指标的观测值如矩阵 X 所示。下面对其进行灰色变权聚类决策。

$$X = (x_{ij}) = \begin{bmatrix} 4.34 & 16.37 & 2046 & 10.20 \\ 1.76 & 10.83 & 1096 & 18.67 \\ 1.08 & 6.32 & 523 & 13.72 \\ 1.44 & 4.81 & 250 & 9.43 \end{bmatrix}$$

第一步: 通过对 20 位专家调查, 得到指标 j 关于 S_k 灰类的白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, 3, 4, k=1, 2, 3$) 分别为

$$\begin{aligned} f_1^1(2.16, 3.24, -, -), \quad f_1^2(1.08, 2.16, -, 3.24), \quad f_1^3(-, -, 1.08, 2.16) \\ f_2^1(9.6, 14.4, -, -), \quad f_2^2(4.8, 9.6, -, 14.4), \quad f_2^3(-, -, 4.8, 9.6) \\ f_3^1(-, -, 390, 780), \quad f_3^2(390, 780, -, 1170), \quad f_3^3(780, 1170, -, -) \\ f_4^1(-, -, 6.5, 13), \quad f_4^2(6.5, 13, -, 19.5), \quad f_4^3(13, 19.5, -, -) \end{aligned}$$

第二步: 根据聚类对象观测值的白化权函数值计算分类区分度。

以第一个聚类对象 1 为例, 各观测值的白化权函数值为

$$\begin{aligned} f_1^1(x_{11}) = 1, \quad f_1^2(x_{11}) = 0, \quad f_1^3(x_{11}) = 0 \\ f_2^1(x_{12}) = 1, \quad f_2^2(x_{12}) = 0, \quad f_2^3(x_{12}) = 0 \\ f_3^1(x_{13}) = 0, \quad f_3^2(x_{13}) = 0, \quad f_3^3(x_{13}) = 1 \\ f_4^1(x_{14}) = 0.4308, \quad f_4^2(x_{14}) = 0.4308, \quad f_4^3(x_{14}) = 0 \end{aligned}$$

对象 1 隶属于各类的隶属测度为

$$\begin{aligned} \mu_1^1(x_{11}) = 1, \quad \mu_1^2(x_{11}) = 0, \quad \mu_1^3(x_{11}) = 0 \\ \mu_2^1(x_{12}) = 1, \quad \mu_2^2(x_{12}) = 0, \quad \mu_2^3(x_{12}) = 0 \\ \mu_3^1(x_{13}) = 0, \quad \mu_3^2(x_{13}) = 0, \quad \mu_3^3(x_{13}) = 1 \\ \mu_4^1(x_{14}) = 0.5, \quad \mu_4^2(x_{14}) = 0.5, \quad \mu_4^3(x_{14}) = 0 \end{aligned}$$

进一步计算各指标关于对象 1 的分类区分度

$$r_1(x_{11}) = 1, \quad r_2(x_{12}) = 1, \quad r_3(x_{13}) = 1, \quad r_4(x_{14}) = 0.3691$$

第三步：由分类区分度确定对象 i 关于指标 I_j 的分类权重。

按照式 (8) 计算各指标关于第一个对象的分类权重，得

$$\eta_{11} = \eta_{12} = \eta_{13} = 0.2968, \quad \eta_{14} = 0.1096$$

同理，对象 2，对象 3，对象 4 的分类权重为

$$\eta_{21} = \eta_{22} = \eta_{23} = \eta_{24} = 0.25$$

$$\eta_{31} = 0.4747, \quad \eta_{32} = \eta_{33} = \eta_{34} = 0.1751$$

$$\eta_{41} = \eta_{42} = \eta_{44} = 0.1751, \quad \eta_{43} = 0.4747$$

第四步：计算灰色变权聚类系数 $\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m \mu_j^k(x_{ij}) \cdot \eta_{ij}$

$$\sigma_1 = (0.6484, 0.0548, 0.1484), \quad \sigma_2 = (0.125, 0.5, 0.375)$$

$$\sigma_3 = (0.0876, 0.2627, 0.6498), \quad \sigma_4 = (0.5623, 0.2627, 0.1751)$$

综合以上结果，可得灰色变权聚类系数矩阵 Σ 为

$$\Sigma = (\sigma_i^k) = \begin{bmatrix} 0.6484 & 0.0548 & 0.1484 \\ 0.125 & 0.5 & 0.375 \\ 0.0876 & 0.2627 & 0.6498 \\ 0.5623 & 0.2627 & 0.1751 \end{bmatrix}$$

$$\text{第五步：} \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_1^k\} = \sigma_1^1 = 0.6484, \quad \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_2^k\} = \sigma_2^2 = 0.5$$

$$\max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_3^k\} = \sigma_3^3 = 0.6498, \quad \max_{1 \leq k \leq 3} \{\sigma_4^k\} = \sigma_4^1 = 0.5623$$

因此，在 4 种采煤方法中，综采方法技术和炮采方法技术经济综合效益好，普采方法技术经济综合效益较好，而高档普采方法技术经济综合效益差。

我们主要是立足于分类指标权重与属性指标权重之间的区别，提出了灰色变权聚类方法。通过定义白化权函数的分类信息熵与分类区分度来度量各指标对区分对象类别所作的贡献，并据此确定分类指标的权重。该方法能够融合聚类对象的样本信息和专家的经验，有效确定不同聚类对象的各指标权重，同时也解决了传统灰色变权聚类中由于指标的量纲不同，以及数值上相差较大情况下导致的这些指标参与聚类的作用减弱的问题。

第 8 章 灰色不确定性决策模型

灰色决策是现代决策科学的重要组成部分,是 20 世纪 80 年代后期开始逐步发展起来的一类解决不确定性决策问题的分析方法。随着科学技术的日新月异,经济全球化步伐的不断加快,社会变得越来越复杂,人类对问题的认识也越来越深刻,问题的解决需要更多新学科的交叉与融合。不确定性决策在社会、经济、政治、管理、环境及工程技术等众多领域中得到了成功应用。不确定性决策理论与方法亦成为研究的热点。

8.1 动态多指标灰色关联决策模型

8.1.1 引言

目前,关于多目标决策问题的研究主要集中在解决具有多个指标、有限个方案的静态决策问题。关于动态决策和评估问题的研究近几年相继有一些研究文献,但在已有的文献中,大多是将较成熟的静态多指标决策理论和方法移植到动态决策问题上。由于在工程技术系统、社会、经济、管理中存在众多多时段或阶段的综合决策与评价问题,这类问题实际上是在决策空间和目标空间的基础上,又增加了一个时间空间,是具有时间、指标、方案的三维决策排序问题。对于此类决策问题,由于指标量纲不同,难以进行直接比较,因而需要对原始决策矩阵进行初始化处理。现有的对决策矩阵处理通常采用在 $[0, 1]$ 区间上无量纲化变换,这种方法存在只奖不罚的不足。由于在实际中有时某事物的积极因素与消极因素之间可能相互抵消,这种现象在实际生产和社会生活中大量存在,因此我们有必要在对决策矩阵进行变换时,把规范化决策矩阵中的数值从 $[0, 1]$ 扩充到 $[-1, 1]$ 上。通过构造 $[-1, 1]$ 线性变换算子,可以将规范化决策矩阵的数据从 $[0, 1]$ 区间上拓广到 $[-1, 1]$ 上,并利用此方法得到规范化决策矩阵,再由规范化决策矩阵寻求各时段的正、负理想方案,并在此基础上建立一种新的基于动态多指标灰色关联分析决策模型。

8.1.2 动态多指标灰色关联决策模型

定义 8.1.1 设动态多指标决策问题有 n 个被评估对象或拟定的决策方案组成决策方案集 S , $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$; m 个评价指标或属性组成指标集 A ,

$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$; 方案 S_i 在 t 时段 (阶段) ($t=1, 2, \dots, T$) 对指标 A_j 的属性值为 $x_{ij}(t)$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$), 则 t 时段方案集 S 对指标集 A 的决策矩阵为

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

由于指标集中的指标具有不同的量纲, 在决策时, 它们难以进行直接比较, 因而需要对原始决策矩阵进行初始化处理, 由于初始化处理方法较多, 如均值化变换、始点零象化变换、初值化变换、百分比变换、归一化变换、级差最大化变换、区间值化变换等, 使用不同的初始化变换处理方法可能会导致评价结果的不同。而现有的对决策矩阵处理都是采用的 $[0, 1]$ 区间线性变换法, 这种方法存在只奖不罚的不足。我们在 6.2 节中介绍了 $[-1, 1]$ 线性变换算子, 通过此线性变换算子对决策矩阵 $X(t) = (x_{ij})$ 进行规范化变换, 则规范化决策矩阵 $R(t) = (r_{ij})$, $R(t) = (r_{ij}^{(0)})$ 中的元素都是无量纲的, 并且所有的元素均符合奖优罚劣的思想, 而对任意的 $r_{ij}(t) \in [-1, 1]$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m, t=1, 2, \dots, T$), 由于规范化决策矩阵中的元素无量纲, 因此它们之间可以进行直接比较; 并且由规范化决策矩阵可求得理想方案和负理想方案。理想方案中各元素都是正值, 负理想方案中各元素都是负值, 这种方法所得到的理想方案和负理想方案与人们在实际中思维印象是一致的。

定义 8.1.2 设

$$r_j^+(t) = \max\{r_{ij}(t) \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$r_j^-(t) = \min\{r_{ij}(t) \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

则方案

$$S^+(t) = \{r_1^+(t), r_2^+(t), \dots, r_m^+(t)\}$$

与方案

$$S^-(t) = \{r_1^-(t), r_2^-(t), \dots, r_m^-(t)\}$$

分别称为 t 时段 ($t=1, 2, \dots, T$) 决策的理想方案和负理想方案。

显然, 在现实社会中理想方案与负理想方案一般都不存在的, 若理想方案存在, 就直接选择理想方案作为选择对象, 无需挑选。若负理想方案存在, 由于它是所有方案中最坏的, 因而可以直接从方案集中删除。

我们可以通过 Delphi 调查法或 AHP 法确定每个指标的权重向量, 设每个指标的权重向量为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \quad \omega_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \omega_i = 1$$

由灰色关联分析方法可知, 在 t 时段第 i 方案与理想方案 $S^+(t)$ 关于指标 $A_j(t)$ 的关联系数为

$$\xi_{ij}^+(t) = \frac{\min_j \min_i |r_{ij}(t) - r_j^+(t)| + \rho \max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^+(t)|}{|r_{ij}(t) - r_j^+(t)| + \rho \max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^+(t)|}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

在 t 时段第 i 方案与负理想方案 $S^-(t)$ 关于指标 $A_j(t)$ 的关联系数为

$$\xi_{ij}^-(t) = \frac{\min_j \min_i |r_{ij}(t) - r_j^-(t)| + \rho \max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^-(t)|}{|r_{ij}(t) - r_j^-(t)| + \rho \max_i \max_j |r_{ij}(t) - r_j^-(t)|}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

其中 ρ 为分辨系数, $\rho \in [0, 1]$, 一般取 $\rho = 0.5$ 。

在 t 时段, 第 i 方案 S_i 与理想方案 $S^+(t)$ 和负理想方案 $S^-(t)$ 的关联度分别为

$$\gamma_i^+(t) = \sum_{j=1}^m \omega_j \xi_{ij}^+(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T$$

$$\gamma_i^-(t) = \sum_{j=1}^m \omega_j \xi_{ij}^-(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, t = 1, 2, \dots, T$$

$\gamma_i^+(t)$ 越大, 表示决策方案 S_i 与理想方案 $S^+(t)$ 越接近, 方案则越佳; $\gamma_i^-(t)$ 的意义恰好相反, $\gamma_i^-(t)$ 越小, 方案越佳。因此, 决策方案应该距理想方案最近, 而同时又距负理想方案最远。假设决策方案 S_i 以优属度 u_i 从属于理想方案 $S^+(t)$, 那么决策方案 S_i 以 $1-u_i$ 从属于负理想 $S^-(t)$, 为确定从属度 u_i , 建立如下优化模型:

$$\min F(u) = \min \sum_{t=1}^T \{ [(1-u_i)v(t)\gamma_i^+(t)]^2 + [u_i v(t)\gamma_i^-(t)]^2 \}$$

其中 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为系统的最优解向量; v 为决策方案各时段的权重向量, $v = (v(1), v(2), \dots, v(T))$, $v(t) > 0$ ($t = 1, 2, \dots, T$), $\sum_{t=1}^T v(t) = 1$ 。

令

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0$$

得

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 2 \sum_{t=1}^T (1-u_i)(v(t)\gamma_i^+(t))(-v(t)\gamma_i^+(t)) + 2 \sum_{t=1}^T u_i(v(t)\gamma_i^-(t))v(t)\gamma_i^-(t) = 0$$

故

$$u_i = \frac{\sum_{t=1}^T (v(t)\gamma_i^+(t))^2}{\sum_{t=1}^T (v(t)\gamma_i^+(t))^2 + \sum_{t=1}^T (v(t)\gamma_i^-(t))^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由于 u_i 表示决策方案 S_i 优属于理想方案 $S^+(t)$ 的程度, u_i 越大, 决策方案 S_i 越优, 反之, u_i 越小, 决策方案 S_i 越差。

注 我们在实际应用时也可以选取其他合适的关联度进行计算, 以满足实际问题的需要。

8.1.3 应用实例

某投资银行欲对四家企业 A_1, A_2, A_3, A_4 进行投资, 选取五项指标进行决策, 分别为投资净资产率、投资销售率、投资成本率、投资利税率、环境污染程度。投资银行对这四家企业 A_1, A_2, A_3, A_4 进行了考察, 具体数据见文献 (孙玉刚, 党耀国, 2007a)。文献 (孙玉刚, 党耀国, 2007a) 根据 Delphi 调查法, 按照专家们的意见确定了各指标的权重向量为 $\omega = (0.241, 0.225, 0.239, 0.217, 0.078)$, 三个时段的权重向量为 $v = (0.329, 0.326, 0.345)$ 。

首先计算它们各时段的规范化决策矩阵

$$R(1) = \begin{bmatrix} -0.2384 & -0.4337 & 0.0571 & 0.5438 & -0.931 \\ 0.8609 & 0.8439 & -0.6857 & -0.0877 & -0.6551 \\ -1 & -1 & -0.3714 & 0.5438 & 1 \\ 0.3774 & 0.5898 & 1 & -1 & 0.5862 \end{bmatrix}$$

$$R(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.4545 & 0.6417 & -1 \\ -0.1111 & -0.5510 & -0.25 & 1 & 0.5757 \\ -0.3333 & -0.2244 & -0.2954 & -0.9701 & 0.8181 \\ -0.5556 & -0.2244 & 1 & -0.6716 & -0.3939 \end{bmatrix}$$

$$R(3) = \begin{bmatrix} -0.9823 & -0.2631 & -0.4453 & 0.625 & -0.1578 \\ 1 & 1 & -0.9159 & 0 & 0.4736 \\ 0.1150 & -0.8421 & 0.3613 & -1 & 0.6842 \\ -0.1327 & 0.1052 & 1 & 0.375 & -1 \end{bmatrix}$$

在第一时段, 理想方案 $S^+(1)$ 和负理想方案 $S^-(1)$ 分别为

$$S^+(1) = \{0.8609, 0.8439, 1, 0.5438, 1\}$$

$$S^-(1) = \{-1, -1, -0.6857, -1, -0.931\}$$

因而在第一时段, 所有方案 S_i 与理想方案 $S^+(1)$ 和负理想方案 $S^-(1)$ 的灰色关联度分别为

$$\begin{aligned} \gamma_1^+(1) &= 0.5734, & \gamma_2^+(1) &= 0.7129, & \gamma_3^+(1) &= 0.5534, & \gamma_4^+(1) &= 0.7158 \\ \gamma_1^-(1) &= 0.5731, & \gamma_2^-(1) &= 0.5709, & \gamma_3^-(1) &= 0.7558, & \gamma_4^-(1) &= 0.5187 \end{aligned}$$

同理, 可计算在第二、第三时段所有方案 S_i 与理想方案和负理想方案的灰色关联度分别为

$$\begin{aligned} \gamma_1^+(2) &= 0.7396, & \gamma_2^+(2) &= 0.5708, & \gamma_3^+(2) &= 0.4386, & \gamma_4^+(2) &= 0.5336 \\ \gamma_1^-(2) &= 0.7049, & \gamma_2^-(2) &= 0.7006, & \gamma_3^-(2) &= 0.8234, & \gamma_4^-(2) &= 0.7510 \\ \gamma_1^+(3) &= 0.5356, & \gamma_2^+(3) &= 0.7449, & \gamma_3^+(3) &= 0.5115, & \gamma_4^+(3) &= 0.6719 \\ \gamma_1^-(3) &= 0.6695, & \gamma_2^-(3) &= 0.5374, & \gamma_3^-(3) &= 0.6897, & \gamma_4^-(3) &= 0.4952 \end{aligned}$$

由此可得各方案关于三个时段的综合排序最优决策向量为

$$u = (0.4743, 0.5610, 0.3079, 0.5422)$$

由优化模型及排序原则可知, 这 4 家企业的排序为 A_2 、 A_4 、 A_1 、 A_3 。结果与文献(孙玉刚, 党耀国, 2007a)的相同, 但分辨程度更高, 它清晰地反映了与平均水平的差距, 物理概念也更加清晰。

8.2 灰色综合聚类决策模型

对于聚类对象属于同一类别的情形, 现有的灰色聚类决策模型还不能有效解决各对象之间的排序问题。而在实际中, 往往需要对同一类对象要进行排序, 以决定它们之间的重要性或优先次序。本节建立的灰色综合聚类决策模型, 弥补了灰色聚类决策模型的不足, 是一种行之有效的新模型。

8.2.1 灰色综合聚类决策模型的建立

定义 8.2.1 设有 n 个决策对象, m 个决策指标, s 个不同的灰类, 决策对象 i 关于决策指标 j 的量化评价值为 x_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$ 。 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \dots, m$, $k=1, 2, \dots, s$) 为决策指标 j 关于 k 灰类的白化权函数。若决策指标 j 关于 k 灰类的综合决策权与 k 无关, 即 ω_j ($j=1, 2, \dots, m$) 为决策指标 j 的综合决策权, 且 $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$, 则称

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \omega_j$$

为决策对象 i 属于 k 灰类的决策系数。

定义 8.2.2 由 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\sigma_i^k\} = \sigma_i^{k^*}$, 则称决策对象 i 属于 k^* 灰类。

在实际问题中, 常常会遇到多个决策对象属于同一决策灰类, 而该灰类常常能容纳的决策对象个数有一定的限额, 这时我们需要对这些决策对象进行排序, 以便确定它们的取舍。由于决策系数向量它们不是单位向量, 因而它们之间不能进行比较, 因此, 我们对决策系数作如下改变。

定义 8.2.3 令 $\delta_i^k = \frac{\sigma_i^k}{\sum_{k=1}^s \sigma_i^k}$, 称为决策对象 i 属于 k 灰类的归一化决策系数

(或称为单位化决策系数)。

称 $\Pi = (\delta_i^k) = \begin{bmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \cdots & \delta_1^s \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \cdots & \delta_2^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_n^1 & \delta_n^2 & \cdots & \delta_n^s \end{bmatrix}$ 为归一化决策系数矩阵。

定义 8.2.4 由 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_i^k\} = \delta_i^{k^*}$, 则称决策对象 i 属于 k^* 灰类。

命题 8.2.1 对决策对象 i 按决策系数 σ_i^k 和归一化决策系数 δ_i^k 进行聚类, 两者所得结果是一致的。即按决策系数与按归一化决策系数进行聚类, 对决策对象来说, 它们所在的灰类不变。

归一化决策系数虽然已经单位化了, 但由于归一化决策系数向量中各分量之间前后数据大小的差异, 它对各对象之间的排序有很大的影响, 如 $\delta_1 = (0.4, 0.38, 0.22)$, $\delta_2 = (0.41, 0.2, 0.39)$, 这时两个对象虽然都属于第一灰类, 如果直接比较它们的归一化决策系数, 由于 $0.41 > 0.4$, 因此对象 2 应排在对象 1 前面, 但由于对象 1 属于第一灰类和第二灰类的系数之和明显大于对象 2 属于第一灰类和第二灰类的系数之和, 而对象 2 属于第一灰类的聚类系数与对象 1 属于第一灰类的聚类系数相差不大, 因此人们通常会认为对象 1 的聚类结果应优于对象 2 的聚类结果。这就造成了计算结果与人们的实际想象之间有一定的差异, 造成这种差异的原因就是我们在对归一化决策系数进行比较时, 没有把归一化决策系数作为一个整体考虑。

假若某对象属于第 k 灰类, 我们就有理由认为该对象属于第 k 灰类的聚类系数及其附近的聚类系数的和总体来讲应该是大的。由于该对象属于第 k 灰类, 该对象属于第 k 灰类的聚类系数的权重最大, 离第 k 灰类越远, 对应的权重越小。

定义 8.2.5 设决策对象有 s 个不同灰类, 令 $\eta_1 = (s, s-1, s-2, \cdots, 1)$, $\eta_2 = (s-1, s, s-1, s-2, \cdots, 2)$, $\eta_3 = (s-2, s-1, s, s-1, \cdots, 3)$, $\eta_4 = (s-3, s-2, s-1, s, \cdots, 4)$, $\cdots$, $\eta_k = (s-k+1, s-k+2, \cdots, s-1, s, s-1, \cdots, k)$, $\cdots$, $\eta_{s-1} = (2, 3, \cdots, s-1, s, s-1)$, $\eta_s = (1, 2, 3, \cdots, s-$

1, s), 称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 分别为第一灰类、第二灰类, $\dots$, 第 s 灰类的调整系数。

注 η_k ($k=1, 2, \dots, s$) 为 s 维向量, 其中第 k 个分量为 s , 以此为中心, 步长为 1, 各分量依次向两边递减。

定义 8.2.6 设有 n 个决策对象, s 个不同灰类, 若对象 i 为第 k 灰类, 则称 $\omega_i = \eta_k \cdot \delta_i^T$, 为对象 i 的综合决策测度。

定义 8.2.7 设有 n 个决策对象, s 个不同灰类, 若对象 i 为第 k 灰类, δ_i^k , ω_i 如定义 8.2.3 和定义 8.2.6 所示。若 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_{i_1}^k\} = \delta_{i_1}^{k^*}$, $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_{i_2}^k\} = \delta_{i_2}^{k^*}$, 即对象 i_1 和对象 i_2 都属于 k^* 灰类。且 $\omega_{i_1} > \omega_{i_2}$, 则称在 k^* 灰类中, 决策对象 i_1 优于决策对象 i_2 。

在实际工作中, 如果我们计算的结果中属于某一类的对象较多, 而实际需要选取的较少, 我们可以通过比较各对象的综合决策测度的对象进行选优。如在职称评定时, 有 5 人都同时达到了评定条件, 但由于指标的限制, 只能晋升 3 人, 就必须从中选择 3 个最优秀的进行晋升。

定义 8.2.8 设有 n 个决策对象, s 个不同灰类, 若对象 i 为第 k 灰类, δ_i^k , ω_i 如定义 8.2.3 和定义 8.2.6 所示。如果 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_{i_1}^k\} = \delta_{i_1}^{k^*}$, $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_{i_2}^k\} = \delta_{i_2}^{k^*}$, $\dots$, $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_{i_l}^k\} = \delta_{i_l}^{k^*}$, 即对象 $i_1, i_2, \dots, i_l$ 均属于 k^* 灰类。且 $\omega_{i_1} > \omega_{i_2} > \dots > \omega_{i_l}$, 若决策灰类 k^* 容纳的对象个数为 l_1 ($l_1 < l$), 则称对象 $i_1, i_2, \dots, i_{l_1}$ 为 k^* 灰类的选取对象, 其余的对象为 k^* 灰类的候补对象。

综上所述, 可得以下灰色综合聚类决策模型的算法:

- (1) 按照综合决策要求划分灰类数 s , 将各指标的取值范围也相应地划分为 s 个灰类, 确定白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ ($j=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, s$)。
- (2) 根据定性分析结论确定每个指标的聚类权 $\omega_j, j=1, 2, \dots, m$ 。
- (3) 计算对象 i 关于灰类 k 的决策系数

$$\sigma_i^k = \sum_{j=1}^m f_j^k(x_{ij}) \omega_j$$

其中 $f_j^k(x_{ij})$ 为对象 i 在指标 j 下属于灰类 k 的白化权函数, ω_j 为指标 j 在灰色评估决策中的权重。

- (4) 计算对象 i 关于灰类 k 的归一化决策系数 δ_i^k , 其中

$$\delta_i^k = \frac{\sigma_i^k}{\sum_{k=1}^s \sigma_i^k}$$

- (5) 若 $\max_{1 \leq k \leq s} \{\delta_i^k\} = \delta_i^{k^*}$, 判定对象 i 属于 k^* 灰类。

- (6) 对属于第 k 灰类的所有对象 i 计算其综合决策测度 $\omega_i = \eta_k \cdot \delta_i^T$ 。
- (7) 按综合决策测度 ω_i 对第 k 灰类的所有对象进行排序并择优。
- (8) 结束。

8.2.2 实例分析——江苏省主导产业选择

8.2.2.1 问题的提出

主导产业是指在一国或地区经济发展的某阶段,对产业结构和经济发展起着导向性和带动性作用,并具有广阔的市场前景和技术进步能力的产业部门。产业结构的升级过程表现为主导产业的更替和发展。日本学者筱原三代平在为规划日本产业结构时提出了两个理论基准:①需求的收入弹性基准;②生产率上升基准。经济学家赫希曼从产业相互关联的角度来研究主导产业部门的问题。他认为有些产业间的互补关系比其他产业的这种关系更强一些,政府在一系列投入—产出连锁关系更强烈、更密切的地方找到一个经济体系中的“战略部门”,即主导产业部门。

现代产业理论认为,资源配置结构的演化,是经济发展的结果,也是经济发展的前提,经济结构优化是经济发展的永恒主题。区域产业结构的调整,能够保证主导产业对其他产业的带动作用,能够保证区域经济快速发展。

产业结构的升级过程表现为主导产业的更替和发展。众所周知,国民经济各产业之间的比例和联系构成了国民经济的产业结构。区域经济发展过程中,各个产业在地区产业系统中的地位、作用是不相同的,其中有一个或几个产业处于主要的支配地位,构成地区的主导产业和主导产业群。主导产业是区域经济增长与发展的主要动力来源,是推动区域经济结构演化的主角,区域经济发展过程的实质就是主导产业的发展和变换的过程,同时,主导产业也是形成合理和有效的产业结构的契机。现代区域经济成长的过程,实质上是主导产业部门的成长过程。主导产业对地区经济增长的影响,具体表现在以下三个方面:一是前瞻影响,即主导产业对使用其产品之产业部门的影响;二是回顾影响,即主导产业对其提供生产资料的产业的影响;三是旁侧影响,即主导产业对地方经济和城市的影响。主导产业就是通过这三种影响,将自身的产业优势辐射到地区其他产业,带动地区经济发展。因此我们要首先选择和确定一定时期的主导产业,通过主导产业的发展来带动或推动国民经济各产业部门的协调发展。

区域产业结构的调整与优化,实质上就是正确选择区域主导产业,使之成为区域经济发展的主要核心,它可以促进区域产业结构水平和经济增长质量的提高。主导产业的增长率高于国民经济中的平均增长率,随着经济的发展,主导产业在国民经济中的比重不断提高,区域产业结构不断优化。

根据主导产业理论,地区的产业系统可以分解为主导产业、为主导产业顺利发展尽可能减少“瓶颈”的辅助产业以及存在于其余产业中的潜导产业(一般产业)。

概括地说,地区产业结构的调整、优化的基本思路就是:选准并优化应重点发展的主导产业,使之有效地承担起全国地域分工的任务,并增强其带动地区经济发展的辐射力;配套发展关联产业,特别是主导产业的前向关联产业,尽可能延长产品链条;提高支柱产业的产业素质,保持和巩固其已有的支柱作用,积极发展基础性产业,特别是其中的“瓶颈”产业,克服其对地区经济的制约作用;扶持一般产业,使原有主导产业因条件的变化、主导产业的地位削弱以后,新的主导产业可以及时接替上来,保持区域经济系统正常的新陈代谢。

8.2.2.2 区域主导产业的特征及选择原则

区域主导产业决定着整个区域经济体系的形成和演化,明确主导产业及其与关联产业、辅助产业、一般产业的关系,对于推动区域济健康具有十分重要的意义。区域主导产业的形成和演化又在一定程度上受区域经济结构、市场取向和资源禀赋的影响,促进主导产业的发展是制定区域产业政策的出发点和归宿。处于不同发展阶段的地区,各有各的特征、作用和问题。我们分析区域经济结构,目的就是提出适合本地区的产业政策。通过对一些经济发达国家经济起飞阶段主导产业部门发展的历史考察,主导产业部门一般具有如下特征:

(1) 从供给方面看,它有生产的潜力,生产率上升或技术进步速度较高。该产业部门一般为反映当代世界科技新趋向的新兴产业,效益高,具有大规模生产的可能性,具有较高的产出能力和产出增长率。

(2) 从需求方面看,它有市场的潜力,需求收入弹性高。国内和国际市场对该产品具有巨大的需求,因而具有发展前景。

(3) 从产业间的联系看,它与经济体系其他产业的关联程度大,带动能力强,即产业的链锁效应或关联效应强。

(4) 从产业的性质看,该产业一般为中间需求性的制造业部门,促进国民经济增长的弹性大,对国民经济增长的贡献大,也即该产业部门的一定增长,对国民经济增长的边际贡献大。

(5) 在开放条件下,该产业部门具有较大的出口能力和创汇能力,其产品出口总额中占有较大的比重,对平衡国际收支差额的贡献也大。

(6) 符合国家的产业政策,实现产业优势。

(7) 从历史的角度看,主导产业部门具有随技术、市场、资源等因素发生重大变动而不断更替的特征。这种变更意味着产业结构的变革。

区域的某一个产业具备以上特征时,它就可能演化成一个区域或地区的主导

产业。在选择主导产业时必须综合考虑该地区的实际情况。因而，我们在选择主导产业时应遵循以下原则：

资源优势原则。主导产业的选择应建立在深刻认识本区域自然条件、资源优势、劳动力优势的基础上，具有相对集中的自然资源和良好的社会发展基础，才能在区域经济中发挥主导作用，在同其他区域的竞争中才能取得良好的效益。在考察资源优势时，要用发展的眼光，从长远来考察。

市场供求原则。区域经济主导产业不但在区域经济发展中起主导作用，而且它能带动区域经济的全面发展，产品市场扩张能力强，其产品社会需求量的不断增长是区域主导产业发展的首要条件。

经济效益原则。提高经济效益是区域经济发展的最终目标。区域主导产业应在各产业产值和收入的构成中具有较大的份额，在区域间有较高的产出投入比和比较利益。

关联效益原则。区域经济主导产业不但在区域中起主导作用，而且它能带动区域经济的全面发展，能起到通过该产业发展带动相关产业发展的作用，体现区域产业演变的趋势。

产业优势原则。具有资源、市场、技术等潜在优势和广阔的发展前景，通过培养和开发能够形成未来经济发展的支柱，成为本行业、本部门的龙头或新兴产业。

技术进步原则。技术进步可以提高产品产量，改善产品质量，减轻工人劳动强度，改善生态环境，在社会发展和经济发展中起着十分重要的作用。区域主导产业应该是区域内具有技术领先或具有较大的技术储备，并且能够顺应当今技术发展的潮流，在地区产业的高级化中具有推动作用的技术含量较高的产业。

可持续发展的原则。可持续发展观点强调的是环境与经济的协调发展，追求的是人与自然的和谐。其目标是要使人类的各种需求得到满足，个人得到充分发展，又要保护生态环境，不对后代的生存和发展构成危害。因此在选择主导产业时，首先要强调把保护环境作为一个重要的衡量标准。

充分就业原则。在工业化的进程中，结构调整会带来结构性失业等社会问题。在选择主导产业的过程中，要充分考虑就业问题，尽可能地吸收劳动力就业，维持社会稳定，实现社会和谐发展。

“瓶颈”部门优先发展原则等。

在确定区域主导产业的实践中，除了上述准则，往往还要根据区域经济社会发展的实际情况，提出确定区域主导产业应当遵循的准则。

8.2.2.3 区域主导产业评价指标体系

区域主导产业的这些特征及选择区域主导产业的原则为我们选择区域主

导产业指明了方向,结合江苏省的实际情况,我们选取以下指标作为江苏省区域经济主导产业选择的指标体系。

1) 产业关联度指标

产业关联度分为前向关联度和后向关联度,都是指某一产业需求量变化直接或间接引起其他各产业部门投入产出量变化的程度,亦称为波及效果。常用的有感应度系数和影响力系数两种,设 b_{ij} 为投入产出分析中的完全消耗系数矩阵 B 中的系数, n 为划分的产业部门个数。

第 i 部门的感应度系数 μ_i 为

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^n b_{ij}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}}$$

μ_i 的大小反映了各产业部门产出增加对第 i 产业部门产出的影响程度,亦称前向关联度。感应系数 μ_i 越大,说明 i 产业部门的前向关联能力越强。

第 j 部门的影响力系数 γ_j 为

$$\gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^n b_{ij}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}}$$

γ_j 的大小反映了第 j 产业部门需求量的增加对其他各产业部门产出的影响程度,也叫后向关联度,影响力系数 γ_j 越大,说明第 j 产业部门的后向关联能力越强。通常感应度系数较大的多属于基础产业部门,影响力系数较大的多属于最终产品部门。

如果 $\gamma_j > 1$, 表示该产业的影响力在全部产业中居于平均水平之上; 如果 $\gamma_j = 1$, 表示该产业的影响力在全部产业中居于平均水平; 如果 $\gamma_j < 1$, 表示该产业的影响力在全部产业中居于下游水平。同样, μ_i 也有类似的解释。

2) 需求收入弹性指标

设 y 为国内生产总值, x_i 为第 i 产业部门产品的需求量, 则第 i 部门的收入弹性 ϵ_i 为

$$\epsilon_i = \frac{y}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y}$$

ϵ_i 反映了国内生产总值变化对第 i 产业部门产品的需求量变化的影响, 一般说来需求收入弹性越大的部门, 市场扩张能力越强。当 $\epsilon_i < 1$ 时, 说明第 i 产业部门

需求膨胀率低于国内生产总值增加速度；当 $\epsilon_i > 1$ 时，说明第 i 产业部门需求膨胀率高于国内生产总值增加速度；当 ϵ_i 等于或接近于 1 时，说明第 i 产业部门需求增长速度处于平均水平。因而区域主导产业应该是收入弹性较大的部门。

3) 增长率指标

设 x_i^0 为第 i 产业部门初始状态的产品需求量， r_i 为平均增长率，则第 i 部门产品的需求量为

$$x_i^t = x_i^0 (1 + r_i)^t$$

r_i 越大，则第 i 产业增长越快，它在区域经济系统中的地位和作用也越重要。

4) 劳动力就业指标

由于我国劳动力严重过剩，所以劳动力就业就成为各级政府关心的头等大事。在产业结构调整中，劳动力就业结构也是结构调整的一项主要内容。我们用劳动力综合就业系数来评价各产业对劳动力的吸纳能力。设 v_i 为投入产出表中的劳动报酬， q_i 为投入产出表中的总产出， c_{ij} 为投入产出表中的列昂惕夫逆矩阵系数，则第 i 产业部门的劳动力综合就业系数 β_i 为

$$\beta_i = \sum \frac{v_i}{q_i} c_{ij}$$

劳动力综合就业系数 β_i 的大小反映了某一产业为了生产 1 单位的最终产品，需要本产业和其他相关产业部门直接和间接的投入多少劳动力。

上述指标皆为无量纲指标。为了便于评价，我们根据其在区域经济发展中的重要程度将区域部门划分为三个不同的类型，分别为一般产业、辅助产业、主导产业。通过 Delphi 调查确定每个指标关于各个类型的白化权函数及其各指标在综合评估中的权重。

8.2.2.4 江苏省主导产业与辅助产业选择

我们根据江苏省 1997 年的投入产出表及江苏省历年的统计年鉴，运用灰色定权聚类评估的方法对江苏省区域经济主导产业和辅助产业进行了选择。

(1) 各部门的感应度系数及影响力系数、综合就业率由 1997 年的投入产出表计算得出；

(2) 需求收入弹性、增长率由历年的统计年鉴计算得出；

(3) 由于统计年鉴中统计的部门与投入产出表中的部门不一致，我们把投入产出表中的 40 个部门进行了合并，合并为 34 个部门。各指标值的计算结果见表 8.1。

表 8.1 34 部门各项指标的计算结果

名称	感应度系数 μ_i	影响力系数 γ_i	需求收入弹性 ε_i	增长率 r_i	综合就业 率 β_i
农业	0.9633	0.6756	0.260	0.008	0.7286
煤炭采选业	0.8889	0.6876	0.526	-0.009	0.5936
石油及天然气开采	0.8199	0.3589	3.111	0.337	0.3528
金属矿采选业	0.2161	0.7366	0	0.065	0.6717
非金属矿采选业	0.6359	0.7649	2.676	-0.111	0.4226
食品制造及烟草加工	0.8249	1.0321	0.791	0.072	0.5096
纺织业	1.2055	1.2583	1.256	0.064	0.3982
服装皮革羽绒及纤维制品	0.2598	1.4266	1.479	0.090	0.6244
木材加工及家具制造业	0.2896	1.0386	1.227	0.130	0.4542
造纸印刷及文教用品制造业	0.9162	1.1368	1.363	0.114	0.4746
石油加工及炼焦业	1.2970	0.9357	0.759	0.115	0.3630
化学工业	3.3553	1.0795	1.170	0.136	0.3834
非金属矿物制品业	1.1903	1.0556	1.757	0.017	0.4596
金属冶炼及压延加工业	4.7383	1.4733	2.084	0.020	0.4607
金属制品业	0.8404	1.3129	0.889	0.110	0.4002
机械工业	1.2090	1.2996	1.199	0.046	0.4296
交通运输设备制造业	0.6622	1.5949	0.766	0.066	0.4370
电气机械及器材制造业	0.8473	1.4695	1.744	0.119	0.4154
电子及通信设备制造业	1.1501	1.2383	2.511	0.262	0.3957
仪器仪表及文化办公机械制造	0.1256	1.2873	3.172	0.211	0.4362
其他制造业	1.1311	1.0108	5.764	0.044	0.5896
电力及蒸汽热水生产和供应	1.6183	0.7644	1.294	0.232	0.4471
煤气生产和供应业	0.0946	1.4203	1.789	0.142	0.6892
自来水的生产和供应业	0.1208	0.7659	0.305	0.042	0.5050
建筑业	0.3474	1.1201	1.262	0.147	0.5311
运输邮电业	1.8850	0.6446	0.850	0.078	0.4722
商业饮食业	3.1201	0.7710	0.867	0.046	0.5482
金融保险业	1.1328	0.5166	1.021	0.145	0.2747

续表

名称	感应度系数 μ_i	影响力系数 γ_i	需求收入弹性 ϵ_i	增长率 r_i	综合就业 率 β_i
房地产业	0.2238	0.9941	1.236	0.169	0.4061
社会服务业	1.1264	0.7829	1.227	0.143	0.5008
卫生体育和社会福利业	0.2152	1.2420	1.699	0.178	0.5205
教育艺术及广播电影电视业	0.1110	0.7258	0.988	0.111	0.7162
科学研究综合技术服务业	0.1969	0.8553	0.902	0.135	0.5796
行政机关及其他行业	0.2412	0.9139	1.851	0.227	0.5478

根据灰色综合聚类决策模型及各指标值,通过 Delphi 调查确定每个指标关于各个类型的白化权函数及其各指标在灰色综合评估中的权重。通过对调查资料的汇总和分析,我们得感应度系数、影响力系数、收入弹性系数、增长率、劳动力综合就业系数的白化权函数分别为

$$\begin{aligned}
 &f_1^1[0.9, 1.3, -, -], \quad f_1^2[0.6, 0.9, -, 1.2], \quad f_1^3[-, -, 0.5, 1] \\
 &f_2^1[0.9, 1.3, -, -], \quad f_2^2[0.5, 0.9, -, 1.3], \quad f_2^3[-, -, 0.4, 0.9] \\
 &f_3^1[1, 1.6, -, -], \quad f_3^2[0.5, 1, -, 1.5], \quad f_3^3[-, -, 0.4, 1] \\
 &f_4^1[6, 12, -, -], \quad f_4^2[3, 7, -, 11], \quad f_4^3[-, -, 4, 10] \\
 &f_5^1[0.3, 0.5, -, -], \quad f_5^2[0.25, 0.45, -, 0.7], \quad f_5^3[-, -, 0.25, 0.4]
 \end{aligned}$$

感应度系数、影响力系数、收入弹性系数、增值率、劳动力综合就业系数的权重分别为: 0.14、0.14、0.24、0.24、0.24。由此可得各部门灰色综合评价结果(表 8.2)。

表 8.2 34 部门灰色综合评价结果

名称	决策系数 σ_i			综合决策系数 σ_i			max	聚类结果
	主导产业	辅助产业	一般产业	主导产业	辅助产业	一般产业		
农业	0.2621	0.1719	0.5335	0.2709	0.1776	0.5514	0.5514	3
煤炭采选业	0.2400	0.3026	0.5705	0.2156	0.2719	0.5125	0.5125	3
石油及天然气开采	0.5433	0.2259	0.2659	0.5249	0.2182	0.2569	0.5249	1
金属矿采选业	0.2400	0.1099	0.6657	0.2363	0.1082	0.6555	0.6555	3
非金属矿采选业	0.1471	0.3165	0.6197	0.1358	0.2922	0.5720	0.5720	3
食品制造及烟草加工	0.2862	0.3815	0.5290	0.2392	0.3188	0.4420	0.4420	3
纺织业	0.3501	0.2434	0.4828	0.3253	0.2261	0.4486	0.4486	3

续表

名称	决策系数 α_i			综合决策系数 β_i			max	聚类结果
	主导产业	辅助产业	一般产业	主导产业	辅助产业	一般产业		
服装皮革羽绒及纤维制品	0.3193	0.2347	0.5624	0.2860	0.2102	0.5038	0.5038	3
木材加工及家具制造业	0.3505	0.6737	0.1983	0.2867	0.5511	0.1622	0.5511	2
造纸印刷及文教用品制造业	0.4989	0.6565	0.0234	0.4232	0.5569	0.0199	0.5569	2
石油加工及炼焦业	0.5278	0.3882	0.0592	0.5412	0.3981	0.0607	0.5412	1
化学工业	0.7829	0.2372	0.0265	0.7480	0.2266	0.0254	0.7480	1
非金属矿物制品业	0.6348	0.4563	0	0.5818	0.4182	0	0.5818	1
金属冶炼及压延加工业	0.4728	0.2297	0.4800	0.3998	0.1943	0.4059	0.4059	3
金属制品业	0.7402	0.2924	0.0446	0.6872	0.2714	0.0414	0.6872	1
机械工业	0.4891	0.5635	0.1275	0.4145	0.4775	0.1080	0.4775	2
交通运输设备制造业	0.3332	0.5733	0.3451	0.2662	0.4581	0.2757	0.4581	2
电气机械及器材制造业	0.3491	0.6629	0.2029	0.2874	0.5456	0.1670	0.5456	2
电子及通信设备制造业	0.5065	0.4904	0.0120	0.5020	0.4861	0.0119	0.5020	1
仪器仪表及文化办公机械制造	0.7789	0.2278	0.1400	0.6793	0.1987	0.1220	0.6793	1
其他制造业	0.8396	0.2393	0	0.7782	0.2218	0	0.7782	1
电力及蒸汽热水生产和供应	0.6767	0.4138	0.0379	0.5997	0.3667	0.0336	0.5997	1
煤气生产和供应业	0.8600	0.0010	0.1400	0.8591	0.0010	0.1399	0.8591	1
自来水的生产和供应业	0.2400	0.2802	0.6575	0.2038	0.2379	0.5583	0.5583	3
建筑业	0.7970	0.2251	0.1400	0.6858	0.1937	0.1205	0.6858	1
运输邮电业	0.8266	0.2692	0.0715	0.7081	0.2306	0.0613	0.7081	1
商业饮食业	0.4883	0.5871	0.1134	0.4107	0.4939	0.0954	0.4939	2
金融保险业	0.0814	0.1645	0.7354	0.0829	0.1677	0.7494	0.7494	3
房地产业	0.6402	0.2943	0.1400	0.5958	0.2739	0.1303	0.5958	1
社会服务业	0.7992	0.3245	0.0327	0.6911	0.2806	0.0283	0.6911	1
卫生体育和社会福利业	0.8397	0.1926	0.1400	0.7163	0.1643	0.1194	0.7163	1
教育艺术及广播电影电视业	0.7200	0.0790	0.1887	0.7290	0.0800	0.1910	0.7290	1
科学研究综合技术服务业	0.6607	0.2630	0.1525	0.6139	0.2444	0.1417	0.6139	1
行政机关及其他行业	0.7248	0.2812	0.1400	0.6325	0.2454	0.1222	0.6325	1

注：在聚类结果栏内，1代表主导产业，2代表辅助产业，3代表一般产业。

通过以上计算可得以下结论：

第一，可以作为主导产业的候选部门有：石油及天然气开采、石油加工及炼

焦业、化学工业、非金属矿物制品业、金属冶炼及压延加工业、金属制品业、电子及通信设备制造业、仪器仪表及文化办公机械制造、其他制造业、电力及蒸汽热水生产和供应、煤气生产和供应业、建筑业、运输邮电业、房地产业、社会服务业、卫生体育和社会福利业、教育艺术及广播电影电视业、科学研究综合技术服务业、行政机关及其他行业。

第二,辅助产业的候选部门有:木材加工及家具制造业、造纸印刷及文教用品制造业、机械工业、交通运输设备制造业、电气机械及器材制造业、商业饮食业。

第三,一般产业的候选部门有:农业、煤炭采选业、金属矿采选业、非金属矿采选业、食品制造及烟草加工、纺织业、服装皮革羽绒及纤维制品、金属冶炼及压延加工业、自来水的生产和供应业、金融保险业。

由于石油及天然气开采、石油加工及炼焦业、化学工业、非金属矿物制品业、金属冶炼及压延加工业、金属制品业、电子及通信设备制造业、仪器仪表及文化办公机械制造、其他制造业、电力及蒸汽热水生产和供应、煤气生产和供应业、建筑业、运输邮电业、房地产业、社会服务业、卫生体育和社会福利业、教育艺术及广播电影电视业、科学研究综合技术服务业、行政机关及其他行业。都属于主导产业的候选部门,它们哪些属于首先选取的部门呢?由于 $s=3$,我们计算的主导产业属于第一灰类,因此综合决策测度计算公式为 $\omega_i = 3\delta_i^1 + 2\delta_i^2 + \delta_i^3$ 。计算得各部门的综合决策测度分别为2.268, 2.4805, 2.7226, 2.5818, 2.6458, 2.4901, 2.5573, 2.7782, 2.5661, 2.7192, 2.5653, 2.6468, 2.4655, 2.6628, 2.5969, 2.538, 2.4722, 2.5105。通过比较综合决策测度得各部门的排序为其他制造业、化学工业、煤气生产和供应业、社会服务业、运输邮电业、金属制品业、卫生体育和社会福利业、非金属矿物制品业、电力及蒸汽热水生产供应、建筑业、仪器及文化办公机械制造、教育艺术广播电影电视、行政机关及其他行业、电子及通信设备制造业、石油加工及炼焦业、科学研究综合技术服务业、房地产业、石油及天然气开采。

实现经济增长方式由粗放型向集约型转变和产业结构升级,是江苏省经济发展面临的主要任务之一。其关键就是正确选择和大力促进主导产业的发展。通过主导产业所具有的较强的吸收高新技术能力和促使高新技术进步的速度,以及它的高关联度、高渗透力,减少物资、能源的消耗,提高加工深度和提高附加值,带动整个产业结构的升级,同时又能吸收大量的劳动力。产业结构的升级,也是主导产业替代的过程,主导产业的选择并非一劳永逸,它是随着区域经济的发展而不断发展演化的,在新的发展阶段,某些老的主导产业将被新的主导产业所替代,区域经济结构也随之变化。因此,在培育和发展主导产业的同时,必须统筹规划,正确处理好各产业之间的发展关系,保持区域经济的协调发展。

8.3 多指标加权灰靶决策模型

8.3.1 引言

灰靶决策是灰色系统理论中解决多指标决策问题的方法之一。在已有的灰靶决策研究中,都是把各指标的重要性等同看待,而且对各指标的效果样本矩阵直接进行建模。而实际中,不同的指标在不同的决策中具有不同的作用,因此在多目标决策中将各指标等同看待是不符合实际情况的,对原有的灰靶决策模型进行改进是必要的。由于各指标的量纲不同,对效果样本矩阵不加处理直接建模,从数学的角度来看,它们之间进行比较是没有实际意义的,因此在建模前必须对效果样本矩阵进行无量纲化处理,我们在 $[-1, 1]$ 线性变换算子的基础上建立了多指标加权灰靶决策模型。

8.3.2 灰靶决策模型的建立

定义 8.3.1 设多指标决策问题有 n 个被评估对象或拟定的决策方案组成决策方案集 S , $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$; m 个评价指标或属性组成指标集 A , $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$; 方案 S_i 对指标 A_j 的效果样本值为 x_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$), 则方案集 S 对指标集 A 的效果样本矩阵为

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

指标属性集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 一般情况下可分为三种类型,即“效益型”、“成本型”和“区间型”(“固定型”可视为区间型的特例)。

由于指标集中的指标具有不同的量纲,在决策时,难以对它们进行直接比较,因而需要对原始效果样本矩阵进行初始化处理。6.2 节介绍的 $[-1, 1]$ 线性变换算子对效果样本矩阵 $X(t) = (x_{ij})$ 进行变换,得决策矩阵 R 。

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$$

R 中的元素都是无量纲的,并且所有的元素均符合“奖优罚劣”的标准,而对任意的 $r_{ij} \in [-1, 1]$ ($i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$), 其中 $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$ 为方案 i 的效果向量。

定义 8.3.2 设

$$r_j^0 = \max\{r_{ij} \mid 1 \leq i \leq n\}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

则称

$$r = (r_1^0, r_2^0, \dots, r_m^0) \quad (8.3.1)$$

为多指标灰靶决策的最优效果向量, 也称为靶心。

通过 Delphi 调查法或 AHP 法可以确定每个指标的权重, 设权重向量为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \quad \omega_j > 0, j = 1, 2, \dots, m, \sum_{j=1}^m \omega_j = 1$$

定义 8.3.3 称

$$R^{(m)} = \{(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \mid \omega_1(r_{i1} - r_1^0)^2 + \omega_2(r_{i2} - r_2^0)^2 + \dots + \omega_m(r_{im} - r_m^0)^2 = R^2\}$$

为以 $r = (r_1^0, r_2^0, \dots, r_m^0)$ 为靶心的 m 维椭圆灰靶。

定义 8.3.4 设 $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}) \in R^{(m)}$, 称

$$\epsilon_i = |r_i - r| = \sqrt{\omega_1(r_{i1} - r_1^0)^2 + \omega_2(r_{i2} - r_2^0)^2 + \dots + \omega_m(r_{im} - r_m^0)^2} \quad (8.3.2)$$

为效果向量 r_i 的靶心距。靶心距的大小反映了效果向量的优劣。

效果向量 r_i 的靶心距 ϵ_i 越小, 则决策方案 S_i 越优, 反之, 效果向量 r_i 的靶心距 ϵ_i 越大, 则决策方案 S_i 越差。

综上所述, 可得多目标加权灰靶决策模型的算法如下:

(1) 根据多指标决策问题构造效果样本矩阵 $X = (x_{ij})_{m \times n}$, 通过 Delphi 调查法或 AHP 法确定了每个指标的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$;

(2) 利用 $[-1, 1]$ 线性变换算子对效果样本矩阵 X 进行变换, 得决策矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times n}$;

(3) 由决策矩阵 R , 根据式 (8.3.1) 式求出最优效果向量 r ;

(4) 利用式 (8.3.2) 式求出效果向量 r_i 的靶心距 ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), ϵ_i 按从小到大的顺序排列, 即可得到对各方案的最优排序;

(5) 结束。

8.3.3 应用实例

为开发新产品, 拟定了五个投资方案 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 , 选定 4 个指标, 它们分别为投资额、期望净现值、风险盈利值、风险损失值。其中各方案的效果样本值列于表 8.3, 试对五个投资方案进行排序以决定最佳投资方案。

表 8.3 各方案的效果样本值

目标 方案	投资额 /万元	期望净现值 /万元	风险盈利值 /万元	风险损失值 /万元
S_1	5.20	5.20	4.73	0.473
S_2	10.08	6.70	5.71	1.599
S_3	5.25	4.20	3.82	0.473
S_4	9.72	5.25	5.54	1.313
S_5	6.60	3.75	3.30	0.803

在指标集中, 期望净现值、风险盈利值为效益型指标, 投资额、风险损失值为成本型指标。

我们利用灰色加权灰靶决策模型求出投资方案的排序, 具体步骤如下:

(1) 由表 8.3 中数据建立效果样本矩阵

$$X = \begin{bmatrix} 5.20 & 5.20 & 4.73 & 0.473 \\ 10.08 & 6.70 & 5.71 & 1.599 \\ 5.25 & 4.20 & 3.82 & 0.473 \\ 9.72 & 5.25 & 5.54 & 1.313 \\ 6.60 & 3.75 & 3.30 & 0.803 \end{bmatrix}$$

根据专家法得指标权重向量为

$$\omega = (0.10, 0.30, 0.15, 0.45)$$

(2) 根据 $[-1, 1]$ 线性变换算子将效果样本矩阵化为决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.8007 & 0.1071 & 0.0833 & 0.6886 \\ -1 & 1 & 0.8257 & -1 \\ 0.7823 & -0.4881 & -0.6060 & 0.6886 \\ -0.8671 & 0.1369 & 0.6969 & -0.5711 \\ 0.2841 & -0.7559 & -1 & 0.1937 \end{bmatrix}$$

(3) 由决策矩阵可得最优效果向量

$$r = (0.8007, 1, 0.8257, 0.6886)$$

(4) 计算各评价方案的靶心距 ϵ_i 。

$$\epsilon_1 = 0.5673, \quad \epsilon_2 = 1.2667, \quad \epsilon_3 = 0.9858, \quad \epsilon_4 = 1.1028, \quad \epsilon_5 = 1.2494$$

(5) 按 ϵ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 值从小到大的顺序排列, 即可得到 5 个方案 S_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 的排序为

$$S_1 > S_3 > S_4 > S_5 > S_2$$

因此投资方案 S_1 为最佳投资方案。

8.4 灰色层次综合决策模型

8.4.1 问题的提出

多层次决策普遍存在于企业生产、工程建设项目的选优、企业效益评估等实际问题中。由于在决策过程中涉及各方面的利益、意愿,因此只有在决策中充分考虑各方面的意愿、影响,才能综合协调各方面的利益,进行科学、合理的决策。因此对于这一类研究具有重要的理论意义和实际应用背景。有关这一方面的研究已经取得了一些进展。邓聚龙教授讨论了灰色层次决策问题,但他把每一个决策者在决策过程中处于同等重要程度来看待,没有考虑各层次内部各个决策者的权重问题;邓聚龙、詹前涌等讨论了灰色多层次决策关联模型,考虑了决策中各指标的权重问题,但它所讨论的层次性只是对指标进行分类,不属于严格意义上的多层次决策问题。我们针对不同决策者在决策中所起的不同作用,研究了多层次综合决策问题。首先在 A 、 B 层决策中,定义了 A 、 B 层次决策意向序列、 A 、 B 层次决策意向矩阵;最后计算上下层次之间意向决策序列的灰色绝对关联度,并按照最大原则集成的方法建立了灰色加权层次综合决策模型,提出了寻求满意灰类和满意项目的灰色综合决策方案。最后通过算例说明了该模型及方法的可行性、实用性及有效性。

8.4.2 灰色层次决策模型

定义 8.4.1 设 A 、 B 、 C 为三个决策层次,一般设 A 为群众层, B 为专家层, C 为领导层。由 A 、 B 、 C 三个决策层次共同完成的决策,称为典型层次决策,简称为层次决策;基于灰方法的层次决策称为灰色层次决策。令 j 为决策项目, $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$, J 为项目集; k 为灰类, $k \in K = \{1, 2, \dots, n\}$, K 为灰类集; p 为专家方案, $p \in P = \{1, 2, \dots, l\}$, P 为方案集。 u_A 为 A 层次决策人员, $u_A \in \{1, 2, \dots, s\}$; u_B 为 B 层次专家决策人员, $u_B \in \{1, 2, \dots, r\}$; u_C 为 C 层次管理决策人员, $u_C \in \{1, 2, \dots, v\}$ 。

定义 8.4.2 设 f_k 为 k 灰类的白化函数, d_{ij} 为 A 层次决策者 i 对 j 项目的决策样本,它们组成 A 层次决策样本矩阵

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{s1} & d_{s2} & \cdots & d_{sm} \end{bmatrix}$$

ω_i 为 A 层 i 决策者的权重, 且 $\sum_{i=1}^s \omega_i = 1$ 。

(1) 当 $\omega_i = \frac{1}{s}$ ($i=1, 2, \dots, s$) 时, 称

$$\sigma_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^s f_k(d_{ij})\omega_i}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^s f_k(d_{ij})\omega_i}$$

为 A 层决策等权意意向值;

(2) 当 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ 不完全相等时, 称

$$\sigma_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^s f_k(d_{ij})\omega_i}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^s f_k(d_{ij})\omega_i}$$

为 A 层决策非等权意意向值。称

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mn} \end{bmatrix} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

为 A 层样本灰意向决策矩阵; 其中 $\sigma_k = (\sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \dots, \sigma_{mk})^T$, $k \in K$, 称 σ_k 为 A 层意向决策序列。

设 g_j 为 j 项目的白化权函数, e_{ip} 为 B 层次决策者 i 关于第 p 个方案的决策样本, 它们组成 B 层次决策样本矩阵

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1l} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rl} \end{bmatrix}$$

η_i 为 B 层 i 决策者的权重, 且 $\sum_{i=1}^r \eta_i = 1$ 。

(1) 当 $\eta_i = \frac{1}{r}$ ($i=1, 2, \dots, r$) 时, 称

$$\delta_{pj} = \frac{\sum_{i=1}^r g_j(e_{ip})\eta_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^r g_j(e_{ip})\eta_i}$$

为 B 层决策等权意向值;

(2) 当 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 不完全相等时, 称

$$\delta_{pj} = \frac{\sum_{i=1}^r g_j(e_{ip}) \eta_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^r g_j(e_{ip}) \eta_i}$$

为 B 层决策非等权意向值。

$$\delta_{pj} = \frac{\sum_{i=1}^r g_j(e_{ip}) \eta_i}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^r g_j(e_{ip}) \eta_i}$$

为 B 层决策意向值; 称

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \cdots & \delta_{mn} \end{bmatrix} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)^T$$

为 B 层样本灰意向决策矩阵; 其中 $\delta_p = (\delta_{p1}, \delta_{p2}, \dots, \delta_{pm})^T$, $p \in P$, 称 δ_p 为 B 层样本意向决策序列。

设 h_{ij} 为 C 层次决策者 i 关于第 k 灰类的决策样本值, 它们组成 C 层次决策样本矩阵

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{v1} & h_{v2} & \cdots & h_{vn} \end{bmatrix}$$

θ_i 为 C 层 i 决策者的权重, 且 $\sum_{i=1}^v \theta_i = 1$, 称

$$q = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v) \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{v1} & h_{v2} & \cdots & h_{vn} \end{bmatrix} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

为 C 层样本意向决策序列。

定义 8.4.3 以 B 层的第 p 个样本意向序列 $\delta_p = (\delta_{p1}, \delta_{p2}, \dots, \delta_{pm})^T$ 为参考序列, A 层的第 k 个意向序列 $\sigma_k = (\sigma_{1k}, \sigma_{2k}, \dots, \sigma_{mk})^T$ 为比较序列, 它们之间的灰色绝对关联度为 ϵ_{pk} , 称 ϵ_{pk} 为 A 与 B 的联合决策的 k 灰类决策元。

称

$$L_{AB} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{l1} & \varepsilon_{l2} & \cdots & \varepsilon_{ln} \end{bmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_l)^T$$

为 A 与 B 的联合决策矩阵; 其中 $\varepsilon_p = (\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2}, \cdots, \varepsilon_{pn})^T$, $p \in P$, 称 ε_p 为 A 与 B 的联合决策序列。

定义 8.4.4 以 C 层样本意向序列 $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 为参考序列, 以 L_{AB} 的联合决策序列 ε_p 为比较序列, 它们之间的灰色绝对关联度为 γ_p , $p \in P$, 称 γ_p 为 L_{ABC} 三级联合决策元。称

$$L_{ABC} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l)$$

为 A 、 B 与 C 的联合决策序列。

定义 8.4.5 (1) 对于三级联合决策 $L_{ABC} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l)$,

若 $\gamma_{p^*} = \max_{1 \leq p \leq l} \{\gamma_p\}$, 则称 p^* 为满意方案。

(2) 对于 p^* , 由于 $\varepsilon_{p^*} = (\varepsilon_{p^*1}, \varepsilon_{p^*2}, \cdots, \varepsilon_{p^*n})^T$,

若 $\varepsilon_{p^*k^*} = \max_{1 \leq k \leq n} \{\varepsilon_{p^*k}\}$, 则称 k^* 为满意灰类。

(3) 对于 p^* , 由于 $\delta_{p^*} = (\delta_{p^*1}, \delta_{p^*2}, \cdots, \delta_{p^*m})$,

若 $\delta_{p^*j^*} = \max_{1 \leq j \leq m} \{\delta_{p^*j}\}$, 则称 j^* 为满意项目。

8.4.3 实例分析

设某集团拟开发 4 种商品, 准备在三个地区建厂, 投资额度分为 4 个等级 (灰类), 即高、中、低、较低投资。该集团投资决策由群众层、经理层、董事会三层联合决策。假设在群众层 L_A 中分为三组, 他们主要是对投资这 4 种商品进行决策, 样本决策矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} 2000 & 200 & 700 & 100 \\ 1000 & 500 & 300 & 200 \\ 100 & 800 & 100 & 300 \end{bmatrix}$$

假设他们的权重分别为 0.3, 0.3, 0.4。

在经理层 L_B 中有 4 个决策者, 他们主要是对三个地区建厂进行决策, 设经理层的样本决策矩阵为

$$E = \begin{bmatrix} 90 & 75 & 80 \\ 80 & 80 & 95 \\ 85 & 65 & 90 \\ 75 & 70 & 85 \end{bmatrix}$$

假设他们的权重分别为 0.3, 0.2, 0.2, 0.3。

在董事会 L_C 层, 他们主要是考虑对商品的投资灰类进行决策, 他们的样本决策矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.36 & 0.16 & 0.10 \\ 0.30 & 0.48 & 0.12 & 0.10 \\ 0.26 & 0.42 & 0.17 & 0.15 \\ 0.32 & 0.46 & 0.9 & 0.13 \end{bmatrix}$$

假设他们的权重分别为 0.25, 0.25, 0.25, 0.25。

设各灰类的白化函数为 $f_1[400, 1500, -, -]$, $f_2[200, 800, -, 1400]$, $f_3[100, 400, -, 700]$, $f_4[-, -, 100, 400]$ 。

由 L_A 层的样本决策矩阵 D 可得 L_A 的样本灰意向决策矩阵 σ ,

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.4359 & 0.1413 & 0.0722 & 0 \\ 0.1880 & 0.4498 & 0.3092 & 0.1176 \\ 0 & 0.2453 & 0.1767 & 0.3235 \\ 0.3760 & 0.1635 & 0.4417 & 0.5588 \end{bmatrix} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$$

设各项目的白化权函数为 $g_1[80, 90, -, -]$, $g_2[70, 80, -, 90]$, $g_3[65, 75, -, 85]$, $g_4[-, -, 70, 80]$ 。

由 L_B 层的样本决策矩阵 E 可得 L_B 的样本灰意向决策矩阵 δ

$$\delta = \begin{bmatrix} 0.2857 & 0.3214 & 0.2857 & 0.1071 \\ 0 & 0.2258 & 0.3548 & 0.4193 \\ 0.4683 & 0.3913 & 0.1304 & 0 \end{bmatrix} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$$

以 B 层的样本意向序列 δ_p ($p=1, 2, 3$) 为参考序列, A 层的样本意向序列 σ_k ($k=1, 2, 3, 4$) 为比较序列, 计算它们之间的灰色绝对关联度 ϵ_{pk} , ϵ_{pk} 组成的 A 与 B 联合决策矩阵为

$$L_{AB} = \begin{bmatrix} 0.6975 & 0.8235 & 0.8244 & 0.7001 \\ 0.6141 & 0.7787 & 0.7779 & 0.9633 \\ 0.9098 & 0.6827 & 0.6830 & 0.6355 \end{bmatrix} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)^T$$

由 L_C 层的样本决策矩阵 H 可得 L_C 的样本意向决策序列

$$q = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) \begin{bmatrix} 0.38 & 0.36 & 0.16 & 0.10 \\ 0.30 & 0.48 & 0.12 & 0.10 \\ 0.26 & 0.42 & 0.17 & 0.15 \\ 0.32 & 0.46 & 0.9 & 0.13 \end{bmatrix} = (0.315, 0.43, 0.135, 0.12)$$

以 C 层样本意向决策序列 q_k 为参考序列, 以 L_{AB} 的联合决策序列 ε_p ($p=1, 2, 3$) 为比较序列, 计算它们之间的灰色绝对关联度 γ_p , γ_p 组成的 A 、 B 与 C 的三级联合决策序列为

$$L_{ABC} = (0.7727, 0.7145, 0.8036) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

根据三级联合决策 L_{ABC} , 由于 $\gamma_3 = \max_{1 \leq p \leq 3} \{\gamma_p\} = 0.8036$, 所以 $p^* = 3$ 为满意方案, 即在第三个地区建厂;

对于 $p^* = 3$, 由于 $\varepsilon_{3k^*} = \max_{1 \leq k \leq 4} \{\varepsilon_{3k}\} = \varepsilon_{31} = 0.9098$, 则 $k^* = 1$ 为满意灰类, 即高投资;

对于 $p^* = 3$, 由于 $\delta_{3j^*} = \max_{1 \leq j \leq 4} \{\delta_{3j}\} = \delta_{31} = 0.4683$, 则 $j^* = 1$ 为满意项目, 即开发第一种商品。

综合以上可得满意决策为以高投资方案在第三个地区建厂, 开发第一种商品。

第9章 区间数决策模型

在社会经济系统中,普遍存在着大量的多指标决策问题。近年来,国内外许多学者对多目标决策问题进行了多方位的研究。由于客观事物的复杂性以及人们的知识和认识能力的限制,我们得到的表征事物行为特征的数据往往是区间数,这些事物之间的界限又是不清晰的,因此利用原有的决策方法来对事物进行决策显然是不合适的。在解决实际问题时,常常会遇到决策信息具有不确定性或模糊性,使得对系统进行决策评估时,指标值难以精确化,评估者常常对指标值给出的是区间数,对此类区间值评估问题的研究近几年相继有一些文献,但在已有的文献中,大多是把具有区间数决策矩阵元素的上、下区间界分割成上界矩阵和下界矩阵,然后按一般决策方法进行决策,这样做使原来的区间数被人为地割裂开,使所得结果与实际不符。

9.1 多指标区间数关联决策模型

根据灰色关联度的理论,序列间曲线的几何形状越接近,它们之间的关联程度越大,通过计算区间数关联度,把它们作为一个整体来寻求最优决策方案。

9.1.1 区间数决策矩阵规范化处理方法

定义 9.1.1 设多指标决策问题有 n 个被评估对象或拟定的决策方案组成决策方案集 S , $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$; m 个评价指标或属性组成指标集 A , $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$; 方案 S_i 对指标 A_j 的属性值为 $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$), 则方案集 S 对指标集 A 的区间数决策矩阵为

$$X = \begin{bmatrix} [x_{11}^L, x_{11}^U] & [x_{12}^L, x_{12}^U] & \cdots & [x_{1m}^L, x_{1m}^U] \\ [x_{21}^L, x_{21}^U] & [x_{22}^L, x_{22}^U] & \cdots & [x_{2m}^L, x_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_{n1}^L, x_{n1}^U] & [x_{n2}^L, x_{n2}^U] & \cdots & [x_{nm}^L, x_{nm}^U] \end{bmatrix}$$

指标属性集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 一般情况下可分为两种类型,即“效益型”、“成本型”。所谓“效益型”指标,就是其值越大越好;“成本型”指标就是其值越小越好。

由于指标集中的指标具有不同的量纲,在决策时,它们难以进行直接比较,

因而需要对原始决策矩阵进行规范化处理, 由于规范化处理方法较多, 如均值化变换、始点零象化变换、初值化变换、百分比变换、归一化变换、级差最大化变换、区间值化变换等, 但它们都是对决策矩阵为实数时进行处理的方法。因此, 定义了关于决策样本矩阵为区间数的决策矩阵规范化方法, 对决策样本矩阵进行规范化处理。

定义 9.1.2 设 X 为决策样本矩阵:

$$X = \begin{bmatrix} [x_{11}^L, x_{11}^U] & [x_{12}^L, x_{12}^U] & \cdots & [x_{1m}^L, x_{1m}^U] \\ [x_{21}^L, x_{21}^U] & [x_{22}^L, x_{22}^U] & \cdots & [x_{2m}^L, x_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_{n1}^L, x_{n1}^U] & [x_{n2}^L, x_{n2}^U] & \cdots & [x_{nm}^L, x_{nm}^U] \end{bmatrix}$$

则若 A_j 为效益型指标, 则

$$r_{ij}^L = \frac{x_{ij}^L}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^U}, \quad r_{ij}^U = \frac{x_{ij}^U}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^L}$$

若 A_j 为成本型指标, 则

$$r_{ij}^L = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{ij}^U}}, \quad r_{ij}^U = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{ij}^L}}$$

通过此规范化方法对决策矩阵 X 进行规范化变换, 得规范化决策矩阵 R :

$$R = \begin{bmatrix} [r_{11}^L, r_{11}^U] & [r_{12}^L, r_{12}^U] & \cdots & [r_{1m}^L, r_{1m}^U] \\ [r_{21}^L, r_{21}^U] & [r_{22}^L, r_{22}^U] & \cdots & [r_{2m}^L, r_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [r_{n1}^L, r_{n1}^U] & [r_{n2}^L, r_{n2}^U] & \cdots & [r_{nm}^L, r_{nm}^U] \end{bmatrix} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$$

其中 $r_i = ([r_{i1}^L, r_{i1}^U], [r_{i2}^L, r_{i2}^U], \dots, [r_{im}^L, r_{im}^U])$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为方案 i 的区间数效果向量。显然规范化决策矩阵 R 的元素 $r_{ij}^L, r_{ij}^U \in [0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$)。

9.1.2 区间数灰色关联决策模型的建立

该变换综合考虑了各个方案值在决策矩阵进行规范化中的作用, 由于极差最大化变换、区间值化变换只考虑了它们自身之间的变换, 并且也都是只适合于决策矩阵为实数的情况, 为了克服这些问题, 我们把“效益型”与“成本型”融为一体进行规范化处理, 这样既提高了规范化决策矩阵的分辨度, 又使各方案的属性值得到充分利用。因为对“效益型”指标, 规范化决策矩阵中各元素的区间

数下限取值是决策矩阵中属性值的下限除以它们各方案属性值上限的总和,而规范化决策矩阵中各元素的区间数上限取值是决策矩阵中属性值上限除以它们各方案属性值下限取值的总和,这样“效益型”指标规范化决策矩阵的取值区间就相应地放大,进而提高了规范化决策矩阵的分辨率。这对于“成本型”指标同样适用。

由于在区间数规范化决策矩阵中的元素都已经是经过规范化处理的数据,已经消除了“效益型”、“成本型”指标之间的差异,区间数经过规范化处理以后,对于每一个指标都是希望它们越大越好,因此我们在构造理想最优方案时,选取区间数规范化决策矩阵中各指标对应区间数最大的一个方案作为该指标的最优方案,区间数的大小我们可以利用区间数的上、下界的平均值作为该区间数的具体数值,因此对于多指标决策问题,我们可构造如下的理想最优方案。

定义 9.1.3 设

$$r_{i_0j} = \max \left\{ \frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2} \mid 1 \leq i \leq n \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

它所对应的决策值记为 $[r_{i_0j}^L, r_{i_0j}^U]$, 则称方案

$$S^+ = \{[r_{i_01}^L, r_{i_01}^U], [r_{i_02}^L, r_{i_02}^U], \dots, [r_{i_0m}^L, r_{i_0m}^U]\} \quad (9.1.1)$$

为理想最优方案。

在构造理想最优方案时,如果某一个指标或多个指标中由两个或多个方案的 $\frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2}$ 相等,此时理想最优方案就无法实现,这时我们把区间数规范化处理后的上界 r_{ij}^U 作为理想最优方案的评价标准,也就是把最大的 r_{ij}^U 所对应的方案作为该指标的最优方案,这样我们就可以避免在多个方案的 $\frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2}$ 相等时理想最优方案无法实现的问题。

设通过 Delphi 调查法或 AHP 法确定了每个指标的权重向量为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \quad \omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad \sum_{i=1}^m \omega_i = 1$$

由灰色关联分析方法可知,在第 i 方案与理想最优方案 S^+ 关于指标 A_j 的区间数关联系数为

$$\xi_{i_0j}(k) = \frac{\min_k \min_j \{L_{i_0j}(k)\} + \rho \max_k \max_j \{L_{i_0j}(k)\}}{L_{i_0j}(k) + \rho \max_k \max_j \{L_{i_0j}(k)\}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

其中 ρ 为分辨系数, $\rho \in [0, 1]$, 一般取 $\rho = 0.5$ 。

第 i 方案 S_i 与理想最优方案 S^+ 的区间数关联度分别为

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^m \omega_j \xi_{i_0j}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

显然, ϵ_i 越大, 表示被评价方案与理想最优方案 S^+ 越接近, 即决策方案 S_i 越佳。因此各方案按关联度 ϵ_i 的大小对方案进行排序, 即可得到最优方案。

综上所述, 可得多指标区间数关联决策算法如下:

(1) 确定多指标决策问题的决策方案集 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ 和评价指标集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 求方案集 S 对指标集 A 的区间数决策矩阵

$$X = \begin{bmatrix} [x_{11}^L, x_{11}^U] & [x_{12}^L, x_{12}^U] & \cdots & [x_{1m}^L, x_{1m}^U] \\ [x_{21}^L, x_{21}^U] & [x_{22}^L, x_{22}^U] & \cdots & [x_{2m}^L, x_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_{n1}^L, x_{n1}^U] & [x_{n2}^L, x_{n2}^U] & \cdots & [x_{nm}^L, x_{nm}^U] \end{bmatrix}$$

(2) 对决策矩阵 X 进行规范化处理得规范化区间数决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} [r_{11}^L, r_{11}^U] & [r_{12}^L, r_{12}^U] & \cdots & [r_{1m}^L, r_{1m}^U] \\ [r_{21}^L, r_{21}^U] & [r_{22}^L, r_{22}^U] & \cdots & [r_{2m}^L, r_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [r_{n1}^L, r_{n1}^U] & [r_{n2}^L, r_{n2}^U] & \cdots & [r_{nm}^L, r_{nm}^U] \end{bmatrix}$$

(3) 构造理想最优方案

$$S^+ = \{[r_{10}^L, r_{10}^U], [r_{20}^L, r_{20}^U], \dots, [r_{m0}^L, r_{m0}^U]\}$$

及每个指标的权重向量

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \quad \omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m \omega_i = 1$$

(4) 计算第 i 方案 S_i 与理想最优方案 S^+ 关于指标 A_j 的区间数关联系数

$$\xi_{i0j}(k) = \frac{\min_k \min_j \{L_{i0j}(k)\} + \rho \max_k \max_j \{L_{i0j}(k)\}}{L_{i0j}(k) + \rho \max_k \max_j \{L_{i0j}(k)\}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

(5) 计算第 i 方案 S_i 与理想最优方案 S^+ 的区间数关联度

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^m \omega_j \xi_{i0j}^+, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(6) 按 ϵ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的大小对方案进行排序并择优;

(7) 结束。

9.1.3 应用实例

某投资银行欲对某市四家企业 S_1, S_2, S_3, S_4 进行投资, 现选取投资净资产率、投资利税率、内部收益率、环境污染程度等四项指标对它们进行评估, 以决定是否对其投资。

- A_1 投资净产值率 (净产值与投资额之比);
 A_2 投资利税率 (净利税与投资额之比);
 A_3 内部收益率;
 A_4 环境污染程度 (环保部门历时检测并模糊量化)。

投资银行通过调查与核算这四家企业 S_1, S_2, S_3, S_4 的上述指标, 具体数据如表 9.1 所示; 其中指标 A_1, A_2, A_3 为效益型指标, A_4 为成本型指标。规范化区间数决策矩阵如表 9.2 所示。

表 9.1 区间数决策矩阵

S_i	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	[1.8, 2.2]	[1.2, 1.8]	[1.8, 2.2]	[5.4, 5.6]
S_2	[2.3, 2.7]	[2.4, 3.0]	[1.6, 2.0]	[6.4, 6.6]
S_3	[1.6, 2.0]	[1.7, 2.3]	[1.9, 2.3]	[4.4, 4.6]
S_4	[2.0, 2.4]	[1.5, 2.1]	[1.8, 2.2]	[4.9, 5.1]

表 9.2 规范化区间数决策矩阵

S_i	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	[0.1940, 0.2857]	[0.1304, 0.2647]	[0.2069, 0.3098]	[0.2311, 0.2491]
S_2	[0.2470, 0.3510]	[0.2609, 0.4412]	[0.1839, 0.2817]	[0.1960, 0.2102]
S_3	[0.1720, 0.2597]	[0.1848, 0.3382]	[0.2814, 0.3239]	[0.2813, 0.3057]
S_4	[0.2151, 0.3120]	[0.1630, 0.3088]	[0.2059, 0.3098]	[0.2537, 0.2747]

根据

$$r_{ij} = \max \left\{ \frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2} \mid 1 \leq i \leq 4 \right\}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

所对应的决策值记为 $[r_{ij}^L, r_{ij}^U]$, 则由表 9.2 可得理想最优方案

$$S^* = \{[0.2470, 0.3510], [0.2609, 0.4412], [0.2814, 0.3239], [0.2813, 0.3057]\}$$

由此可计算出各企业规范化区间数决策向量与理想最优方案之间的关联系数, 并假设各指标的权重均为 0.25, 得各企业与理想最优方案的关联度为

$$\epsilon_1 = 0.5305, \quad \epsilon_2 = 0.7457, \quad \epsilon_3 = 0.8547, \quad \epsilon_4 = 0.6867$$

按关联度的大小可得四家企业的综合排序为: 企业 $S_3 >$ 企业 $S_2 >$ 企业 $S_4 >$ 企业 S_1 。因此可知企业 S_3 具有较大的投资价值, 投资银行应把企业 S_3 作为首选投资对象。

9.2 区间数多指标灰靶决策模型

对于区间数决策模型研究近几年相继有一些文献,但对于区间数的灰靶决策问题研究还没有见到,只有关于灰靶决策的研究,因此本节对区间数多指标灰靶决策模型进行了研究,并通过实例来验证了模型的实用性与有效性。

9.2.1 区间数灰靶决策模型的建立

设多指标决策问题有 n 个被评估对象或拟定的决策方案组成决策方案集 S , $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$; m 个评价指标或属性组成指标集 A , $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$; 方案 S_i 对指标 A_j 的属性值为 $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$), 则方案集 S 对指标集 A 的决策样本矩阵为

$$X = \begin{bmatrix} [x_{11}^L, x_{11}^U] & [x_{12}^L, x_{12}^U] & \cdots & [x_{1m}^L, x_{1m}^U] \\ [x_{21}^L, x_{21}^U] & [x_{22}^L, x_{22}^U] & \cdots & [x_{2m}^L, x_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_{n1}^L, x_{n1}^U] & [x_{n2}^L, x_{n2}^U] & \cdots & [x_{nm}^L, x_{nm}^U] \end{bmatrix}$$

按照 9.1 节中决策样本矩阵规范化方法对决策样本矩阵进行规范化处理,得规范化决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} [r_{11}^L, r_{11}^U] & [r_{12}^L, r_{12}^U] & \cdots & [r_{1m}^L, r_{1m}^U] \\ [r_{21}^L, r_{21}^U] & [r_{22}^L, r_{22}^U] & \cdots & [r_{2m}^L, r_{2m}^U] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [r_{n1}^L, r_{n1}^U] & [r_{n2}^L, r_{n2}^U] & \cdots & [r_{nm}^L, r_{nm}^U] \end{bmatrix}$$

由于在区间数规范化决策矩阵中的元素都已经是经过规范化处理的数据,已经消除了“效益型”、“成本型”指标之间的差异,区间数经过规范化处理以后,对于每一个指标都是希望它们越大越好,因此,在构造最优效果时,选取区间数规范化决策矩阵中各指标对应区间数最大的作为该指标的最优效果,区间数的大小可以利用区间数的上下界的平均值作为该区间数的具体数值,因此,对于多指标灰靶决策问题,可构造如下的最优效果向量。

定义 9.2.1 设

$$r_j^0 = \max \left\{ \frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2} \mid 1 \leq i \leq n \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

它所对应的决策值记为 $[r_{i_0j}^L, r_{i_0j}^U]$, 称

$$r_0 = \{r_1^0, r_2^0, \dots, r_m^0\} = \{[r_{i_01}^L, r_{i_01}^U], [r_{i_02}^L, r_{i_02}^U], \dots, [r_{i_0m}^L, r_{i_0m}^U]\}$$

为多指标灰靶决策的最优效果向量,也称为靶心。

在构造最优效果向量时,如果某一个指标或多个指标中由两个或多个方案的 $\frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2}$ 相等时,我们仿照 9.1 节的方法,把区间数规范化决策矩阵的上界 r_{ij}^U 作为最优效果的评价标准。

定义 9.2.2 称

$$R^{(m)} = \left\{ ([r_{i1}^L, r_{i1}^U], [r_{i2}^L, r_{i2}^U], \dots, [r_{im}^L, r_{im}^U]) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [(r_{i1}^L - r_{i0}^L)^2 + (r_{i1}^U - r_{i0}^U)^2 + \dots + (r_{im}^L - r_{i0}^L)^2 + (r_{im}^U - r_{i0}^U)^2]^{1/2} = R \right. \right\}$$

为以 r_0 为靶心的 m 维球灰靶。

通过 Delphi 调查法或 AHP 法可以确定每个指标的权重,设权重向量为

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \omega_j > 0, j = 1, 2, \dots, m, \sum_{j=1}^m \omega_j = 1$$

定义 9.2.3 称

$$R^{(m)} = \left\{ ([r_{i1}^L, r_{i1}^U], [r_{i2}^L, r_{i2}^U], \dots, [r_{im}^L, r_{im}^U]) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} [\omega_1 ((r_{i1}^L - r_{i0}^L)^2 + (r_{i1}^U - r_{i0}^U)^2) + \dots + \omega_m ((r_{im}^L - r_{i0}^L)^2 + (r_{im}^U - r_{i0}^U)^2)]^{1/2} = R \right. \right\}$$

为以 r_0 为靶心的 m 维椭圆灰靶。

定义 9.2.4 设 $r_i = ([r_{i1}^L, r_{i1}^U], [r_{i2}^L, r_{i2}^U], \dots, [r_{im}^L, r_{im}^U]) \in R^{(m)}$, 称

$$\epsilon_i = |r_i - r_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} [\omega_1 ((r_{i1}^L - r_{i0}^L)^2 + (r_{i1}^U - r_{i0}^U)^2) + \dots + \omega_m ((r_{im}^L - r_{i0}^L)^2 + (r_{im}^U - r_{i0}^U)^2)]^{1/2}$$

为效果向量 r_i 的靶心距。靶心距的大小反映了效果向量的优劣。当 $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_m$ 时,称为球靶心距,当 $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_m$ 时,称为椭圆靶心距。效果向量 r_i 的靶心距越小,则决策方案 S_i 越优,反之,效果向量 r_i 的靶心距越大,则决策方案 S_i 越差。

综上所述,可得区间数多目标灰靶决策模型的算法如下:

(1) 根据区间数多指标决策问题构造效果样本矩阵 $X = ([x_{ij}^L, x_{ij}^U])_{m \times n}$, 利用区间数规范化方法把效果样本矩阵 X 化为规范化决策矩阵 $R = ([r_{ij}^L, r_{ij}^U])_{m \times n}$; 通过 Delphi 调查法或 AHP 法确定了每个指标的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$;

(2) 由规范化决策矩阵 R 及每个指标的权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, 求出灰靶心 r_0 ;

(3) 由效果向量 r_i 与靶心 r_0 , 求出效果向量 r_i 的靶心距 ϵ_i ($i=1, 2, \dots, n$), ϵ_i 按从小到大的顺序排列, 即可得到对各方案的最优排序;

(4) 结束。

9.2.2 应用实例

某投资银行欲对某市四家企业 S_1, S_2, S_3, S_4 进行投资, 现选取投资净资产率、投资利税率、内部收益率、环境污染程度等四项指标对它们进行评估, 以决定是否对其投资。

A_1 投资净资产率 (净资产值与投资额之比);

A_2 投资利税率 (净利税与投资额之比);

A_3 内部收益率;

A_4 环境污染程度 (环保部门历时检测并模糊量化)。

投资银行通过调查与核算这四家企业 S_1, S_2, S_3, S_4 的上述指标, 具体数据如表 9.3 所示; 其中指标 A_1, A_2, A_3 为效益型指标, A_4 为成本型指标。规范化区间数决策矩阵如表 9.4 所示。

表 9.3 区间数决策矩阵

S_i	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	[1.8, 2.2]	[1.2, 1.8]	[1.8, 2.2]	[5.4, 5.6]
S_2	[2.3, 2.7]	[2.4, 3.0]	[1.6, 2.0]	[6.4, 6.6]
S_3	[1.6, 2.0]	[1.7, 2.3]	[1.9, 2.3]	[4.4, 4.6]
S_4	[2.0, 2.4]	[1.5, 2.1]	[1.8, 2.2]	[4.9, 5.1]

表 9.4 规范化区间数决策矩阵

S_i	A_1	A_2	A_3	A_4
S_1	[0.1940, 0.2857]	[0.1304, 0.2647]	[0.2069, 0.3098]	[0.2311, 0.2491]
S_2	[0.2470, 0.3510]	[0.2609, 0.4412]	[0.1839, 0.2817]	[0.1960, 0.2102]
S_3	[0.1720, 0.2597]	[0.1848, 0.3382]	[0.2814, 0.3239]	[0.2813, 0.3057]
S_4	[0.2151, 0.3120]	[0.1630, 0.3088]	[0.2059, 0.3098]	[0.2537, 0.2747]

根据

$$r_j^0 = \max \left\{ \frac{r_{ij}^L + r_{ij}^U}{2} \mid 1 \leq i \leq 4 \right\}, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

所对应的决策值记为 $[r_{0j}^L, r_{0j}^U]$, 则由表 9.4 可得灰靶心

$$r_0 = \{[0.2470, 0.3510], [0.2609, 0.4412], [0.2814, 0.3239], [0.2813, 0.3057]\}$$

假设各指标的权重相同, 即 $\omega_i = 0.25$, ($i=1, 2, 3, 4$), 由此可计算出各企业规范化区间数决策向量与靶心之间的靶心距为

$$\varepsilon_1 = 0.2583, \quad \varepsilon_2 = 0.1664, \quad \varepsilon_3 = 0.1742, \quad \varepsilon_4 = 0.1907$$

按靶心距的大小可得四家企业的综合排序为: 企业 $S_2 >$ 企业 $S_3 >$ 企业 $S_4 >$ 企业 S_1 。因此可知企业 S_2 具有较大的投资价值, 投资银行应把企业 S_2 作为首选投资对象。

9.3 区间数灰色局势决策模型

本节根据灰色局势决策理论, 提出区间数灰色局势决策模型来寻求最优局势的决策方法。

9.3.1 区间数灰色局势决策模型的建立

定义 9.3.1 设决策问题有 n 个被评估对象或事件组成事件集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$; 相应的所有可能的对策的全体称为对策集 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$; 事件集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 与对策集 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 的笛卡儿积 $A \times B = \{(A_i, B_j) \mid A_i \in A, B_j \in B\}$ 称为局势集, 记为 $S = A \times B$, (A_i, B_j) 称为局势, 记为 $S_{ij} = (A_i, B_j)$; 设灰色局势决策有 s 个目标。在 k 目标下事件 A_i 用对策 B_j 来对付的效果样本值为 $[x_{ij}^L(k), x_{ij}^U(k)]$ ($i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, m$, $k=1, 2, \dots, s$)。并称事件、对策、目标、效果为灰色局势决策的四要素, 则在 k 目标下事件集 A 用对策集 B 对付的效果样本矩阵为

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} [x_{11}^L(k), x_{11}^U(k)] & [x_{12}^L(k), x_{12}^U(k)] & \cdots & [x_{1m}^L(k), x_{1m}^U(k)] \\ [x_{21}^L(k), x_{21}^U(k)] & [x_{22}^L(k), x_{22}^U(k)] & \cdots & [x_{2m}^L(k), x_{2m}^U(k)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_{n1}^L(k), x_{n1}^U(k)] & [x_{n2}^L(k), x_{n2}^U(k)] & \cdots & [x_{nm}^L(k), x_{nm}^U(k)] \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, s$$

按照 9.1 节决策样本矩阵规范化方法对决策样本矩阵进行规范化处理, 得区间数规范化效果样本矩阵

$$R^{(k)} = \begin{bmatrix} [r_{11}^L(k), r_{11}^U(k)] & [r_{12}^L(k), r_{12}^U(k)] & \cdots & [r_{1m}^L(k), r_{1m}^U(k)] \\ [r_{21}^L(k), r_{21}^U(k)] & [r_{22}^L(k), r_{22}^U(k)] & \cdots & [r_{2m}^L(k), r_{2m}^U(k)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [r_{n1}^L(k), r_{n1}^U(k)] & [r_{n2}^L(k), r_{n2}^U(k)] & \cdots & [r_{nm}^L(k), r_{nm}^U(k)] \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, s$$

由于在区间数规范化效果样本矩阵中的元素都已经是经过规范化处理的数据,已经消除了目标之间的“效益型”、“成本型”之间的差异。区间数经过规范化处理以后,对于每一个效果样本值都是希望它们越大越好。

定义 9.3.2 设

$$r_{ij}(k) = \frac{r_{ij}^L(k) + r_{ij}^U(k)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, s$$

称

$$\tilde{R}^{(k)} = \begin{bmatrix} r_{11}(k) & r_{12}(k) & \cdots & r_{1m}(k) \\ r_{21}(k) & r_{22}(k) & \cdots & r_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1}(k) & r_{n2}(k) & \cdots & r_{nm}(k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, s$$

为局势集 S 在 k 目标下的一致效果测度矩阵。

称 $\tilde{r}_{ij} = (r_{ij}(1), r_{ij}(2), \dots, r_{ij}(s))$ 为局势 s_{ij} 的一致效果测度向量。

设通过 Delphi 调查法或 AHP 法确定了每个目标的权重向量如下:

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s), \quad \omega_k > 0, k = 1, 2, \dots, s, \sum_{k=1}^s \omega_k = 1$$

ω_k 为 k 目标的决策权。

定义 9.3.3 称 $r_{ij} = \sum_{k=1}^s \omega_k r_{ij}(k)$ 为局势 S_{ij} 的综合效果测度。称

$$R = (r_{ij}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

为综合效果测度矩阵。

定义 9.3.4 (1) 若 $\max_{1 \leq j \leq m} \{r_{ij}\} = r_{i_0j_0}$, 则称 B_{j_0} 为事件 A_i 的最优对策;

(2) 若 $\max_{1 \leq i \leq n} \{r_{ij}\} = r_{i_0j}$, 则称 A_{i_0} 为与对策 B_j 相应的最优事件;

(3) 若 $\max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} \{r_{ij}\} = r_{i_0j_0}$, 则称 $S_{i_0j_0}$ 为最优局势。

综上所述,可得区间数灰色局势决策的算法如下:

(1) 根据事件集 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 和对策集 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ 构造局势集 $\{(A_i, B_j) \mid A_i \in A, B_j \in B\}$, 并确定决策目标 $k = 1, 2, \dots, s$;

(2) 对目标 $k = 1, 2, \dots, s$, 给出相应的效果样本矩阵

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} [x_{11}^L(k), x_{11}^U(k)] & [x_{12}^L(k), x_{12}^U(k)] & \cdots & [x_{1m}^L(k), x_{1m}^U(k)] \\ [x_{21}^L(k), x_{21}^U(k)] & [x_{22}^L(k), x_{22}^U(k)] & \cdots & [x_{2m}^L(k), x_{2m}^U(k)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [x_{n1}^L(k), x_{n1}^U(k)] & [x_{n2}^L(k), x_{n2}^U(k)] & \cdots & [x_{nm}^L(k), x_{nm}^U(k)] \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, s$$

(3) 求区间数规范化效果样本矩阵

$$R^{(k)} = \begin{bmatrix} [r_{11}^L(k), r_{11}^U(k)] & [r_{12}^L(k), r_{12}^U(k)] & \cdots & [r_{1m}^L(k), r_{1m}^U(k)] \\ [r_{21}^L(k), r_{21}^U(k)] & [r_{22}^L(k), r_{22}^U(k)] & \cdots & [r_{2m}^L(k), r_{2m}^U(k)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [r_{n1}^L(k), r_{n1}^U(k)] & [r_{n2}^L(k), r_{n2}^U(k)] & \cdots & [r_{nm}^L(k), r_{nm}^U(k)] \end{bmatrix}$$

$$k = 1, 2, \dots, s$$

(4) 求 k 目标下的一致效果测度矩阵

$$\bar{R}^{(k)} = \begin{bmatrix} r_{11}(k) & r_{12}(k) & \cdots & r_{1m}(k) \\ r_{21}(k) & r_{22}(k) & \cdots & r_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1}(k) & r_{n2}(k) & \cdots & r_{nm}(k) \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, s$$

(5) 确定各目标的决策权向量

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k), \quad \omega_i > 0, i = 1, 2, \dots, s, \sum_{k=1}^s \omega_k = 1$$

(6) 由 $r_{ij} = \sum_{k=1}^s \omega_k r_{ij}^{(k)}$ 得综合效果测度矩阵

$$R = (r_{ij}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

(7) 确定最优局势 $S_{i_0 j_0}$;

(8) 结束。

9.3.2 应用实例

某农场下设四个分场。全场常年的主要夏播作物是玉米、大豆和芝麻。由于四个分场劳力、土壤和水利设施条件不尽相同,对这三种作物栽培技术的掌握程度上也各有所长,考虑到相对集中种植,便于管理,又能发挥各分场的技术优

势,以取得最大的经济效益,因此需对四个分场三种作物的布局作出科学的决策。

我们选取四个分场作为事件,分别记为 I, II, III, IV; 三种农作物玉米、大豆和芝麻作为对策; 目标 1 取为产量 (公斤/公顷), 目标 2 为净收益 (万元/公顷), 目标 3 为秸秆还田, 给土壤增加的有机肥和养分。根据秸秆产量, 折算成还到土壤中去氮、磷、钾的总量, 以公斤/公顷表示。实际效果样本数据如表 9.5 所示。

表 9.5 效果样本数据

农作物		玉米	大豆	芝麻
I	目标 1	[6000, 7500]	[3000, 3750]	[1050, 1500]
	目标 2	[0.2, 0.25]	[0.16, 0.2]	[0.12, 0.15]
	目标 3	[200, 250]	[110, 160]	[70, 110]
II	目标 1	[4500, 6000]	[3000, 3750]	[2250, 2700]
	目标 2	[0.1, 0.14]	[0.18, 0.24]	[0.15, 0.21]
	目标 3	[150, 210]	[120, 150]	[90, 120]
III	目标 1	[5250, 6200]	[2250, 3000]	[1800, 2400]
	目标 2	[0.16, 0.22]	[0.1, 0.14]	[0.12, 0.18]
	目标 3	[160, 210]	[90, 120]	[80, 130]
IV	目标 1	[3300, 4200]	[2250, 3000]	[1500, 2250]
	目标 2	[0.07, 0.11]	[0.12, 0.15]	[0.2, 0.25]
	目标 3	[100, 140]	[50, 80]	[100, 150]

对于作物产量、净收益和秸秆还田带给土壤的养分这三个目标, 均属于效益型目标。由

$$r_{ij}^I(k) = \frac{x_{ij}^I(k)}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^I(k)}, \quad r_{ij}^U(k) = \frac{x_{ij}^U(k)}{\sum_{i=1}^n x_{ij}^U(k)}, \quad k = 1, 2, 3$$

得区间数规范化效果样本矩阵

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} [0.2510, 0.3937] & [0.2222, 0.3571] & [0.1186, 0.2272] \\ [0.1882, 0.3149] & [0.2222, 0.3571] & [0.2542, 0.4090] \\ [0.2196, 0.3254] & [0.1666, 0.2857] & [0.2033, 0.3636] \\ [0.1380, 0.2204] & [0.1666, 0.2857] & [0.1694, 0.3409] \end{bmatrix}$$

$$R^{(2)} = \begin{bmatrix} [0.2777, 0.4716] & [0.2191, 0.3571] & [0.1518, 0.2542] \\ [0.13888, 0.2641] & [0.2465, 0.4285] & [0.1898, 0.3559] \\ [0.2222, 0.4150] & [0.1369, 0.2500] & [0.1518, 0.3050] \\ [0.0972, 0.2075] & [0.1643, 0.2678] & [0.2531, 0.4237] \end{bmatrix}$$

$$R^{(3)} = \begin{bmatrix} [0.2469, 0.4098] & [0.2156, 0.4324] & [0.1372, 0.3235] \\ [0.1851, 0.3442] & [0.2352, 0.4054] & [0.1764, 0.3529] \\ [0.1975, 0.3442] & [0.1764, 0.3243] & [0.1568, 0.3823] \\ [0.1234, 0.2295] & [0.0980, 0.2162] & [0.1960, 0.4411] \end{bmatrix}$$

由此可得各目标的一致效果测度矩阵

$$\tilde{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3223 & 0.2896 & 0.1729 \\ 0.2516 & 0.2896 & 0.3316 \\ 0.2725 & 0.2261 & 0.2835 \\ 0.1792 & 0.2261 & 0.2552 \end{bmatrix}, \tilde{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3747 & 0.2881 & 0.2030 \\ 0.2015 & 0.3375 & 0.2729 \\ 0.3186 & 0.1934 & 0.2284 \\ 0.1523 & 0.2161 & 0.3384 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.3283 & 0.3240 & 0.2303 \\ 0.2647 & 0.3203 & 0.2647 \\ 0.2708 & 0.2503 & 0.2696 \\ 0.1764 & 0.1571 & 0.3186 \end{bmatrix}$$

通过 Delphi 调查得到作物产量、净收益和秸秆还田带给土壤的养分这三个目标的权重分别为 0.3, 0.5, 0.2, 则得综合效果测度矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.3497 & 0.2957 & 0.1995 \\ 0.2291 & 0.3197 & 0.2888 \\ 0.2952 & 0.2146 & 0.2532 \\ 0.1652 & 0.2073 & 0.3095 \end{bmatrix}$$

根据综合效果测度矩阵 R 进行决策:

按行决策, 由 $\max_{1 \leq j \leq 3} \{r_{1j}\} = 0.3497 = r_{11}$, 可知最优局势为 $S_{11} = (A_1, B_1)$, 即第一分场种植玉米; 同理可得最优局势 S_{22}, S_{31}, S_{43} , 即第二分场种植大豆, 第三分场种植玉米, 第四分场种植芝麻。

按列决策, 可得最优局势为 S_{11}, S_{22}, S_{43} , 即玉米由第一分场种植, 大豆由第二分场种植, 芝麻由第四分场种植。

综上所述, 农场在考虑全场粮食作物种植布局时, 玉米主要安排在第一分场, 其次是第三分场; 大豆主要安排在第二分场, 其次是第一分场; 芝麻主要安排在第四分场, 其次是第二、三分场。

9.4 区间数的多目标灰色局势决策模型

9.4.1 传统灰色局势决策的拓展

设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 为事件集, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 为对策集, $S = \{s_{ij} = (a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ 为局势集, $\tilde{u}_{ij}^{(k)}$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$) 为局势 $s_{ij} \in S$ 在 k 目标下的效果样本值。由于决策信息并非一个具体的精确数, 而是一个区间数, 因此, 局势 s_{ij} 在 k 目标下的效果样本值 $\tilde{u}_{ij}^{(k)}$ 为区间数, 记为 $\tilde{u}_{ij}^{(k)} = [u_{ij}^{(k)L}, u_{ij}^{(k)U}]$, 其中 $u_{ij}^{(k)L}$ 和 $u_{ij}^{(k)U}$ 分别为局势 s_{ij} 在 k 目标下的效果样本值的上限和下限。不同的目标往往具有不同的极性, 根据实际情况对效果样本值分别进行以下两种变换, 变换后的一致效果测度区间为 $\tilde{r}_{ij}^{(k)} = [r_{ij}^{(k)L}, r_{ij}^{(k)U}]$ 。

(1) 对于希望效果样本值“越大越好”、“越多越好”这一类的目标, 可采用上限效果测度

$$r_{ij}^{(k)L} = \frac{u_{ij}^{(k)L}}{\sum_{i=1}^n u_{ij}^{(k)U}}, \quad u_{ij}^{(k)U} = \frac{u_{ij}^{(k)U}}{\sum_{i=1}^n u_{ij}^{(k)L}}$$

(2) 对于希望效果样本值“越小越好”、“越少越好”这一类的目标, 可采用下限效果测度

$$r_{ij}^{(k)L} = \frac{\frac{1}{u_{ij}^{(k)U}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_{ij}^{(k)L}}}, \quad r_{ij}^{(k)U} = \frac{\frac{1}{u_{ij}^{(k)L}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_{ij}^{(k)U}}}$$

由于以上两种效果测度 $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ 能够满足① $r_{ij}^{(k)L}, r_{ij}^{(k)U}$ 无量纲; ② $r_{ij}^{(k)L}, r_{ij}^{(k)U} \in [0, 1]$; ③效果越理想, $\tilde{r}_{ij}^{(k)}$ 越大。因此, 可以得到局势集 S 在 k 目标下的一致效果测度矩阵

$$\tilde{R}^{(k)} = (\tilde{r}_{ij}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11}^{(k)} & \tilde{r}_{12}^{(k)} & \cdots & \tilde{r}_{1m}^{(k)} \\ \tilde{r}_{21}^{(k)} & \tilde{r}_{22}^{(k)} & \cdots & \tilde{r}_{2m}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{r}_{n1}^{(k)} & \tilde{r}_{n2}^{(k)} & \cdots & \tilde{r}_{nm}^{(k)} \end{bmatrix}$$

设 η_k ($k=1, 2, \dots, s$) 为目标 k 的决策权重, $\sum_{k=1}^s \eta_k = 1$, 则局势 s_{ij} 的综合效果测度可以表示为 $\tilde{r}_{ij} = \sum_{k=1}^s \eta_k \tilde{r}_{ij}^{(k)}$, 综合效果测度矩阵为

$$\bar{R} = (\bar{r}_{ij}) = \begin{bmatrix} \bar{r}_{11} & \bar{r}_{12} & \cdots & \bar{r}_{1m} \\ \bar{r}_{21} & \bar{r}_{22} & \cdots & \bar{r}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{r}_{n1} & \bar{r}_{n2} & \cdots & \bar{r}_{nm} \end{bmatrix}$$

若 $\max_{1 \leq j \leq m} \{\bar{r}_{ij}\} = \bar{r}_{i_0}$, 则称 b_{i_0} 为事件 a_i 的最优对策; 若 $\max_{1 \leq j \leq m} \{\bar{r}_{ij}\} = \bar{r}_{i_0 j_0}$, 则称 a_{i_0} 为与对策 b_j 相对应的最优事件; 若 $\max_{1 \leq j \leq m} \{\bar{r}_{ij}\} = \bar{r}_{i_0 j_0}$, 则称 $s_{i_0 j_0}$ 为最优局势。

9.4.2 灰局势目标权重的优化模型与求解

首先根据局势集在 s 个目标下的一致效果测度矩阵确定正、负理想效果测度, 由于各个目标的效果测度为区间数, 分别在效果测度的上限和下限中寻找正、负理想效果测度。对事件 a_i , 规定 $v_i^+ = \max_k \max_j \{r_{ij}^{(k)U}\}$ 为 a_i 的正理想效果测度, $v_i^- = \min_k \min_j \{r_{ij}^{(k)L}\}$ 为 a_i 的负理想效果测度。

相应地, 对于 n 个事件, 可以得到正理想效果测度向量 $V^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+)$ 和负理想效果测度向量 $V^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-)$ 。

局势 (a_i, b_j) 在目标 k 下的一致效果测度 $\bar{r}_{ij}^{(k)}$ 与其对应的正、负理想效果测度 v_i^+, v_i^- 的偏差可以分别表示为

$$d^+(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{r}_{ij}^{(k)L} - v_i^+)^2 + (\bar{r}_{ij}^{(k)U} - v_i^+)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$d^-(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\bar{r}_{ij}^{(k)L} - v_i^-)^2 + (\bar{r}_{ij}^{(k)U} - v_i^-)^2]^{\frac{1}{2}}$$

对于事件 a_i , 在目标 k 下的所有对策的一致效果测度与其对应的正、负理想效果测度 v_i^+, v_i^- 的偏差和可以分别表示为目标权重 η_k 的函数

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^m d^+(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) \eta_k$$

$$D_i^- = \sum_{j=1}^m d^-(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) \eta_k$$

对于全部 n 个事件, 在所有对策与目标下的一致效果测度与正、负理想效果测度的总偏差可以表示为

$$D^+(\eta_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^+(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) \eta_k$$

$$D^-(\eta_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^-(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) \eta_k$$

这里, 确定权重 η_k 使得每种局势的一致效果测度与正理想效果测度的总偏

差最小,同时与负理想效果测度的总偏差最大,可以归结为以下多目标优化问题:

$$(\bar{P}) \begin{cases} \min D^+(\eta_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^+(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) \eta_k \\ \max D^-(\eta_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^-(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) \eta_k \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^s \eta_k = 1, \eta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

由于信息不完全的决策系统的权重本身具有一定的不确定性,确定目标权重应使得权重序列 η_k 的不确定性尽量减少。由灰熵的定义可知,目标权重序列 $\eta = \{\eta_k\} (k=1, 2, \dots, s)$ 为灰内涵序列,它的灰熵可以定义为

$$H_{\otimes}(\eta) = - \sum_{i=1}^s \eta_i \ln \eta_i$$

灰熵 $H_{\otimes}(\eta)$ 与 Shannon 熵函数有着相同的结构,具有对称性、非负性、可加性、上凸性和极值性,它们的不同之处在于 Shannon 熵是概率熵,而灰熵是一种非概率熵,灰熵的灰性由序列的灰性决定。但由灰熵函数的上凸性和极值性可知,这种区别并不影响灰熵的极值性。根据极大熵原理,确定目标权重应使得权重序列 η_k 的不确定性尽量减少,因此,施加灰熵 $H_{\otimes}(\eta)$ 的极大化约束

$$(\bar{P}') \begin{cases} \max H_{\otimes}(\eta) = - \sum_{i=1}^s \eta_i \ln \eta_i \\ \text{s. t. } \sum_{k=1}^s \eta_k = 1, \eta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, s \end{cases}$$

$(\bar{P})$ 和 $(\bar{P}')$ 可以转化为以下单目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min & \left\{ \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^+(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) \eta_k - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^-(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) \eta_k + (1-2\mu) \sum_{k=1}^s \eta_k \ln \eta_k \right\} \\ \text{s. t. } & \sum_{k=1}^s \eta_k = 1, \eta_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

其中 $0 < \mu < 1/2$, 表示三个目标之间的平衡系数,可根据实际情况实现给定。

考虑到三个目标函数是公平竞争的,一般取 $\mu = 1/3$ 。

构造拉格朗日函数

$$L(\eta, \lambda) = \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^+(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) \eta_k - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s d^-(\bar{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) \eta_k$$

$$+ (1-2\mu) \sum_{k=1}^i \eta_k \ln \eta_k - \lambda \left(\sum_{k=1}^i \eta_k - 1 \right)$$

根据极值存在的必要条件有

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^+ (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+) - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^- (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) + (1-2\mu)(\ln \eta_k + 1) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^i \eta_k - 1 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\eta_k = \exp \left\{ \frac{\lambda + \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^- (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^+ (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+)}{1-2\mu} - 1 \right\}$$

由于 $\sum_{k=1}^i \eta_k = 1$, 将上式代入得

$$\exp \left\{ \frac{\lambda}{1-2\mu} \right\} = \sum_{k=1}^i \exp \left\{ \frac{\mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^- (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^+ (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+)}{1-2\mu} - 1 \right\}$$

再整理得

$$\eta_k = \frac{\exp \left\{ \frac{\mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^- (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^+ (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+)}{1-2\mu} - 1 \right\}}{\sum_{k=1}^i \exp \left\{ \frac{\mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^- (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^-) - \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d^+ (\tilde{r}_{ij}^{(k)}, v_i^+)}{1-2\mu} - 1 \right\}}$$

9.4.3 最优局势的确定

目标权重确定以后就可以根据公式 $\tilde{r}_{ij} = \sum_{k=1}^i \eta_k \tilde{r}_{ij}^{(k)}$ 计算出综合效果测度矩阵,

由于综合效果测度矩阵中的元素为区间数, 要确定每个事件的最优局势就涉及区间数的排序问题, 这里结合已有的排序方法对每个事件选择最优局势。

对事件 a_i , 按照公式

$$p(\tilde{r}_{ij_1} \geq \tilde{r}_{ij_2}) = \frac{\min\{l_{\tilde{r}_{ij_1}} + l_{\tilde{r}_{ij_2}}, \max\{\tilde{r}_{ij_1}^U - \tilde{r}_{ij_2}^L, 0\}\}}{l_{\tilde{r}_{ij_1}} + l_{\tilde{r}_{ij_2}}}$$

计算 $\tilde{r}_{ij_1} \geq \tilde{r}_{ij_2}$ 的可能度, 将 m 个对策进行两两比较得到可能度矩阵, 这样, 对局势进行排序就转化为求解可能度矩阵的排序向量。由于这里的可能度矩阵一个

$m \times m$ 阶模糊互补判断矩阵, 可以利用公式 $\omega_j = \frac{1}{m(m-1)} \left(\sum_{k=1}^m p_{jk} + \frac{m}{2} - 1 \right)$ 得

到可能度矩阵的排序向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$, 再利用 $\omega_j, j=1, 2, \dots, m$ 对局势进行排序确定最优对策。

综上所述, 多目标加权的灰色局势决策步骤如下:

第一步: 根据事件集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和对策集 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, 构造局势集 $S = \{s_{ij} = (a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}$;

第二步: 确定决策目标;

第三步: 对目标 $k=1, 2, \dots, s$, 求相应的效果样本矩阵;

第四步: 求 k 目标下一致效果测度矩阵, 并确定事件的正、负理想效果测度向量;

第五步: 给出平衡系数 μ , 同时计算各目标的决策权 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$;

第六步: 由 $r_{ij} = \sum_{k=1}^s \eta_k \cdot \bar{r}_{ij}^{(k)}$ 得综合效果测度矩阵;

第七步: 利用区间数排序方法确定最优局势。

9.4.4 应用实例

设某企业拥有四个工厂 (记为工厂 1、工厂 2、工厂 3、工厂 4), 现欲对三种产品 (记为产品 1、产品 2、产品 3) 的生产进行决策。

第一步: 建立事件集、对策集及局势集。选择工厂为事件, 事件集 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4 分别代表四个工厂; 选择产品为对策, 对策集 $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, 其中 b_1, b_2, b_3 分别代表生产四种产品, 由事件 A 和对策集 B 可构造局势集 $S = \{s_{ij} = (a_i, b_j) \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ 。

第二步: 确定决策目标。以产值、产销率、管理费用作为决策目标。

第三步: 求各目标的效果样本矩阵。在三个目标下的效果测度矩阵分别为

$$\begin{aligned}\tilde{U}^{(1)} &= \begin{bmatrix} [1000, 1200] & [480, 560] & [200, 250] \\ [940, 960] & [450, 550] & [150, 200] \\ [670, 720] & [400, 450] & [260, 300] \\ [400, 500] & [370, 430] & [300, 350] \end{bmatrix} \\ \tilde{U}^{(2)} &= \begin{bmatrix} [0.95, 0.98] & [0.86, 0.91] & [0.82, 0.84] \\ [0.87, 0.90] & [0.81, 0.83] & [0.83, 0.86] \\ [0.92, 0.93] & [0.94, 0.96] & [0.90, 0.92] \\ [0.90, 0.92] & [0.97, 0.99] & [0.93, 0.94] \end{bmatrix} \\ \tilde{U}^{(3)} &= \begin{bmatrix} [80, 100] & [40, 50] & [15, 18] \\ [50, 60] & [40, 50] & [12, 14] \\ [20, 30] & [50, 60] & [20, 24] \\ [70, 80] & [25, 30] & [14, 16] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

第四步：求一致效果测度矩阵。对于产值及产销率这两个目标均要求越高越好故选用上限效果测，而对于管理费用则要求其越低越好则宜选择下限效果测度。

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{(1)} &= \begin{bmatrix} [0.2959, 0.3987] & [0.2412, 0.3294] & [0.1818, 0.2747] \\ [0.2781, 0.3189] & [0.2261, 0.3235] & [0.1364, 0.2198] \\ [0.1982, 0.2392] & [0.2010, 0.2647] & [0.2365, 0.3297] \\ [0.1183, 0.1661] & [0.1859, 0.2529] & [0.2727, 0.3846] \end{bmatrix} \\ \tilde{R}^{(2)} &= \begin{bmatrix} [0.2547, 0.2692] & [0.2331, 0.2542] & [0.2303, 0.2414] \\ [0.2332, 0.2473] & [0.2195, 0.2318] & [0.2331, 0.2471] \\ [0.2466, 0.2555] & [0.2547, 0.2682] & [0.2528, 0.2644] \\ [0.2413, 0.2527] & [0.2629, 0.2765] & [0.2612, 0.2701] \end{bmatrix} \\ \tilde{R}^{(3)} &= \begin{bmatrix} [0.1033, 0.1724] & [0.1818, 0.2778] & [0.2047, 0.2884] \\ [0.1722, 0.2759] & [0.1818, 0.2778] & [0.2632, 0.3605] \\ [0.3444, 0.6897] & [0.1515, 0.2222] & [0.1535, 0.2163] \\ [0.1292, 0.1970] & [0.3030, 0.4444] & [0.2303, 0.3090] \end{bmatrix}\end{aligned}$$

第五步：给出平衡系数 μ ，同时计算各目标的决策权 η_1, η_2, η_3 。考虑到三个目标函数是公平竞争的，故取 $\mu = 1/3$ ，可计算出 $\eta_1 = 0.3352, \eta_2 = 0.3094, \eta_3 = 0.3554$ 。

第六步：由 $\tilde{r}_{ij} = \sum_{k=1}^3 \eta_k \cdot \tilde{r}_{ij}^{(k)}$ 计算综合效果测度矩阵。

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} [0.2147, 0.2782] & [0.2176, 0.2878] & [0.2050, 0.2693] \\ [0.2266, 0.2815] & [0.2083, 0.2789] & [0.2114, 0.2783] \\ [0.2652, 0.4043] & [0.2000, 0.2507] & [0.2120, 0.2692] \\ [0.1602, 0.2039] & [0.2514, 0.3283] & [0.2540, 0.3223] \end{bmatrix}$$

第七步：利用区间数排序方法确定最优局势。根据文献（邱菀华，2004；徐泽水，2004）给出的区间数排序方法可得：

事件 a_1 的最优对策 b_2 、事件 a_2 的最优对策 b_1 、事件 a_3 的最优对策 b_1 、事件 a_4 的最优对策 b_2 ；对策 b_1 对应的最优事件为 a_3 、对策 b_2 对应的最优事件为 a_4 、对策 b_3 对应的最优事件为 a_4 。由此可见，最优局势为 S_{31} 、 S_{42} ，也就是说，工厂 3 生产产品 1、工厂 4 生产产品 2 是企业的最优决策。

在研究了决策矩阵为区间数的多目标灰色局势决策问题的同时，也考虑各局势的效果测度与正理想效果值的接近性和目标权重本身的不确定性，建立多目标优化模型，利用拉格朗日乘子法提出了目标权重的一种赋权法，再根据区间数的

可能度对每个事件的最优局势进行排序,并且该模型的计算易于在计算机上实现。此法为解决具有区间数多目标灰色局势决策问题提供了一种科学、实用的决策方法及新的途径。在事先给出各方案的隶属函数的条件下,还可以利用模糊区间方法对决策信息为区间数的局势决策模型作进一步研究。

参考文献

- 曹萃文, 顾幸生. 2005. 灰色动态新陈代谢模型在产品价格预测与需求预测中的应用. 信息与控制, 34 (8): 398~402
- 曹明霞, 党耀国, 张蓉等. 2007. 对灰色关联度计算方法的改进. 统计与决策, 4 (235): 29, 30
- 陈华友, 赵佳宝, 刘春林. 2004. 基于灰色关联度的组合预测模型的性质. 东南大学学报, 34 (1): 131~134
- 陈可嘉. 2003. 经济周期波动的监测与预警系统. 南京航空航天大学硕士学位论文
- 陈世联, 段万春. 1998. 绝对关联度及其应用. 系统工程理论与实践, 6: 109, 110
- 陈耀凯等. 1996. GM (1, 1) 模型在卫生管理中的应用. 见: 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社, 151, 152
- 陈振, 梁保松, 党耀国. 2005. 河南生猪及猪肉生产预测模型的建立及分析. 河南农业大学学报, 39 (4): 422~424
- 崔杰, 党耀国. 2008a. 基于灰色关联度求解指标权重的改进方法. 中国管理科学, 16 (5): 141~145
- 崔杰, 党耀国. 2008b. 一类新的弱化缓冲算子的构造及其应用. 控制与决策, 23 (7): 741~744
- 戴文战, 邹立华, 汪建华等. 2000. 一种基于奖优罚劣原则的多阶段多目标决策模型. 系统工程理论与实践, 20 (6): 32~36
- 党耀国, 刘斌, 关叶青. 2005a. 关于强化缓冲算子的研究. 控制与决策, 20 (12): 1332~1336
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 2004a. 多指标加权灰靶决策模型的研究. 控制与决策, (增刊): 796~798
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌等. 2005b. 聚类系数无显著性差异下的灰色综合聚类方法研究. 中国管理科学, 13 (4): 70~73
- 党耀国, 刘思峰, 薛信莉等. 2006. 我国第一产业内部结构调整的数学模型与对策. 农业系统科学与综合研究, 22 (2): 81~83
- 党耀国, 刘思峰, 翟振杰. 2004b. 具有灰指数律数据序列的建模方法研究. 中国管理科学专稿, (增刊): 72~75
- 党耀国, 刘思峰, 张卓等. 2003. 江苏省第二产业结构调整与“快车道”模型. 江南大学学报, 2 (5): 526~530
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 2005c. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型. 中国管理科学, 13 (1): 132~135
- 党耀国, 刘思峰等. 2004c. 灰色斜率关联度的改进. 中国工程科学, 6 (3): 41~44
- 党耀国, 王正新, 刘思峰. 2008. 灰色模型的病态问题研究. 系统工程理论与实践, 28 (1): 156~160
- 党耀国, 刘思峰, 李炳军等. 2000. 第一产业技术进步贡献率测算分析. 系统工程理论与实践, 20 (8): 95~99
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 2005d. 基于区间数的多指标灰靶决策模型的研究. 中国工程科学, 7 (8): 31~35
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌等. 2004d. 关于弱化缓冲算子的研究. 中国管理科学, 12 (2): 108~111,
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌等. 2005e. 基于动态多指标灰色关联决策的研究. 中国工程科学, 7 (2): 69~72
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌等. 2005f. 两种灰色聚类方法结果一致性研究. 控制与决策, (增刊): 1257~1260
- 党耀国, 刘思峰, 刘斌等. 2004e. 多指标区间数关联决策模型研究. 南京航空航天大学学报, 36 (3): 403~406

- 党耀国, 刘思峰, 米传民. 2007. 强化缓冲算子性质的研究. 控制与决策, 22 (7): 730~734
- 党耀国, 刘思峰, 王莲花. 1996. 农村经济聚类评估分析. 见: 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社
- 邓聚龙. 1985a. 灰色局势决策. 模糊数学, 5 (2): 43~50
- 邓聚龙. 1985b. 灰色系统理论的 GM 模型. 模糊数学, 5 (2): 23~32
- 邓聚龙. 1985c. 灰色系统理论的关联空间. 模糊数学, 2: 1~10
- 邓聚龙. 1985d. 五种灰色预测. 模糊数学, 5 (2): 33~42
- 邓聚龙. 1985e. 灰色系统 (社会·经济). 北京: 国防工业出版社
- 邓聚龙. 1987a. 累加生成灰指数律. 华中工学院学报, 15 (5): 7~12
- 邓聚龙. 1987b. 灰色系统基本方法. 武汉: 华中工学院出版社
- 邓聚龙. 1989. 多目标灰色局势决策的定向漂移. 见: 邓聚龙. 灰色系统论文集. 武汉: 华中理工大学出版社. 130~133
- 邓聚龙. 1996. 灰色系统理论与应用进展的若干问题. 见: 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社. 1~10
- 邓聚龙. 2002a. 灰预测与灰决策. 武汉: 华中理工大学出版社
- 邓聚龙. 1986. 灰色预测与决策. 武汉: 华中工学院出版社
- 邓聚龙. 1992. 灰数学引论——灰色朦胧集. 武汉: 华中理工大学出版社
- 邓聚龙. 2002b. 灰理论基础. 武汉: 华中理工大学出版社
- 董景荣, 杨秀苔. 1998. 用灰色组合模型预测环保投资. 重庆环境科学, 20 (5): 30~32
- 杜宏云, 王正新, 党耀国. 2007. 时序系数 GM (1, 1) 模型及其应用. 统计与决策, 6: 136~137
- 段利忠, 刘思峰. 2003. 灰色聚类分析法评价城市创新能力. 北京工业大学学报, 29 (4): 508~512
- 樊治平, 宫贤斌, 张全. 1999. 区间数多属性决策中决策矩阵的规范化方法. 东北大学学报 (自然科学版), 20 (3): 326~329
- 樊治平, 肖四汉. 1995. 一类动态多指标决策问题的关联分析法. 系统工程, 13 (1): 23~27
- 范凯, 吴皓莹. 2002. 灰色系统关联度中一种新的分辨系数确定方法. 武汉理工大学学报, 24 (7): 86~88
- 方志耕, 刘思峰, 党耀国等. 2004. “十一五”期间南京主要经济社会发展指标总趋势预测与分析. 南京社会科学, (增刊): 31~40
- 冯利华. 1997. 灰色预测模型的问题讨论. 系统工程理论与实践, 17 (12): 125~128
- 傅国耀. 1999. $[-1, 1]$ 上的模糊集及其在集对分析中的应用. 科技通报, 15 (2): 91~93
- 何满喜. 1997. 建立 GM (1, N) 预测模型的新方法. 农业系统科学与综合研究, 13 (4): 241~244
- 何文章, 郭鹏. 1999. 关于灰色关联度中的几个问题的探讨. 数理统计与管理, 18 (3): 25~29
- 黄润生. 1999. 混沌及其应用. 武汉: 武汉大学出版社. 1~4
- 黄元亮, 陈宗海. 2003. 灰色关联理论中存在的不相容问题. 系统工程理论与实践, 23 (8): 118~121
- 吉培荣, 黄巍松, 胡翔勇. 2000. 无偏灰色预测模型. 系统工程与电子技术, 22 (6): 6~8
- 贾海峰, 郑耀泉. 1998. 灰色时序组合预测模型及其在年降雨量预测中的应用. 系统工程理论与实践, 8 (8): 42~45
- 寇进忠. 1996. 数据列变换与 GM (1, 1) 模型精度. 见: 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社. 233~235
- 黎锁平. 2000. 基于灰色关联分析的多级别聚类评价模型的研究. 甘肃工业大学学报, 26 (4): 100~103
- 李炳军, 朱永达, 万鹤群. 1997. 农业机械化系统发展水平概率灰色评估方法及应用. 农业工程学报,

- 13 (3): 16~21
- 李翠凤, 戴文战. 2005. 基于函数 $\cot x$ 变换的灰色建模方法. 系统工程, 23 (3): 110~114
- 李富平. 1996. 灰色多层次局势决策模型及其在矿山设计方案选择中的应用. 河北理工学院学报, 18 (1): 8~12
- 李明凉. 1998. 灰色关联度新判别准则及其计算公式. 系统工程, 16 (1): 68~70
- 李群. 2001. 隶属函数 $\mu_A(u)$ 的扰动问题及扰动算子研究. 大连理工大学学报, 41 (4): 388~391
- 李睿, 许淑君. 2003. 管理人员的聚类评估. 科学与科学技术管理, 4: 71~73
- 李天匀, 熊伟, 王平等. 1995. 结构不破坏实验的灰色预测方法. 华中理工大学学报, 23 (5): 75~78
- 李万海, 张松滨, 王红. 2002. 梯形灰色聚类分析与环境质量评价. 吉林化工学院学报, 19 (1): 23~25
- 李伟军, 叶飞. 2001. 基于灰色关联度的区间评价方法探讨. 系统工程与电子技术, 23 (2): 55~57
- 李学全, 李松仁, 韩旭里. 1996. 灰色系统理论研究 (1): 灰色关联度. 系统工程理论与实践, 15 (11): 91~95
- 李学全. 1995. 灰色关联度量化模型的进一步研究. 系统工程, 13 (6): 58~61
- 李学全, 李松仁, 韩旭里. 1997. 灰色系统 $GM(n, k)$ 模型应用的一种推广. 系统工程理论与实践, 17 (8): 82~86
- 李亚丽, 刘福寿, 杨华堂等. 1997. 灰色关联分析在医院感染管理中的应用. 中华医院管理杂志, 13 (12): 754, 755
- 梁梁, 陈刚. 1996. 基于理想点的区间评价方法. 预测, (5): 60, 61
- 刘斌, 刘思峰, 翟振杰等. 2003a. $GM(1, 1)$ 模型时间响应函数的最优化. 中国管理科学, 11 (4): 54~57
- 刘斌, 张荣, 翟振杰等. 2005. 优化的 $GM(1, 1)$ 模型及其在农村劳动力转移预测中的应用. 农业系统科学与综合应用, 3: 175~177
- 刘斌, 赵亮, 翟振杰等. 2003b. 优化的 $GM(1, 1)$ 模型及其适用范围. 南京航空航天大学学报, (4): 451~454
- 刘家学. 1997. 时序多指标决策的灰色关联分析法. 运筹与管理, 6 (3): 6~10
- 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 2004. 灰色系统理论及其应用. 北京: 科学出版社
- 刘思峰, 党耀国, 李炳军. 1999. G-C-D 模型与技术进步贡献率测算. 中国管理科学, 7 (2): 76~80
- 刘思峰, 党耀国, 李炳军等. 1998a. 河南省各时期技术进步贡献率测算分析. 河南农业大学学报, 32 (3): 203~207
- 刘思峰, 党耀国. 1997. LPGP 的漂移与定位解的满意度. 华中理工大学学报, 25 (1): 24~27
- 刘思峰, 邓秉龙. 2000. $GM(1, 1)$ 模型的适用范围. 系统工程理论与实践, 20 (5): 121~124
- 刘思峰, 李炳军, 杨岭等. 1998b. 区域主导产业评价指标与数学模型. 中国管理科学, 6 (2): 8~13
- 刘思峰, 唐学文, 党耀国. 2004. 我国产业结构的有序度研究. 经济动态, 5: 53~56
- 刘思峰, 王锐兰. 2003. 南京市“九五”期间第三产业的灰色关联分析. 南京理工大学学报, 16 (5): 55~58
- 刘思峰, 徐忠祥. 1996. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社
- 刘思峰. 1996. 灰色系统理论在科学发展中的作用和地位. 见: 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社. 230~232
- 刘思峰. 1997. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子. 华中理工大学学报, 25 (1): 25~31
- 刘思峰. 1998. 灰数学新方法与技术管理系统分析. 华中理工大学博士学位论文
- 刘思峰. 2003. 灰色系统理论的产生、发展及前沿动态. 中国管理科学, 16 (4): 14~17

- 刘伟钢, 蒋丽红. 1996. 铁合金生产中的灰色 GM (1, 1) 模型. 钢铁, 31 (9): 52~56
- 刘希强, 王树泽, 宋中民. 1993. 灰关联空间引论. 贵阳: 贵州人民出版社
- 刘希强, 王照明. 1996. 灰色经济预测模型及其应用. 济南: 黄河出版社
- 刘先锋, 吴娟, 刘士通. 2005. 基于层次分析法和灰色关联决策的野战仓库选址模型研究. 物流技术, 9: 102~112
- 刘玉成. 2006. 改进的灰色 Verhulst GM (1, 1) 建筑物沉降模型. 中国地质灾害与防治学报, 17 (4): 61~63
- 刘震宇. 1995. 具有 n 种投入要素的灰色生产函数. 系统工程理论与实践, 15 (9): 6~8
- 陆剑锋, 党耀国, 曹明霞等. 2006. GM (1, 1) 模型在江苏省“三废”排放分析中的应用. 生态经济, 10: 42~44
- 吕安林. 1996. 消化系统生理研究的灰方案. 见: 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展. 武汉: 华中理工大学出版社, 149, 150
- 吕锋, 崔晓辉. 2002. 多目标决策灰色关联投影法及其应用. 系统工程理论与实践, 22 (1): 103~107
- 吕锋, 刘翔, 刘泉. 2002. 七种灰色系统关联度的比较研究. 武汉工业大学学报, 22 (2): 41~43
- 吕锋. 1997. 灰色系统关联度之分辨系数的研究. 系统工程理论与实践, 17 (6): 49~54
- 吕振江, 樊治平. 1999. 具有阶跃趋势的灰色系统建模方法. 系统工程, 8 (5): 55~58
- 罗党, 刘思峰, 党耀国. 2003. 灰色模型 GM (1, 1) 优化. 中国工程科学, 5 (8): 50~53
- 罗均, 吕恬生, 王琦. 2000. 产品质量灰色系统综合评价方法的研究. 机械科学与技术, 19 (5): 747~749
- 罗战友, 龚晓南, 杨晓军. 2003. 全过程沉降量的灰色 verhulst 预测方法. 水利学报, 3: 29~31
- 马保国, 成国庆. 2000. 一种相似性关联度公式. 系统工程理论与实践, 20 (7): 69~71
- 毛承雄, 高翔. 2005. 灰参数 Verhulst 模型在电力期货价格预测中的应用. 水电能源科学, 23 (3): 80~82
- 孟宪林, 樊庆铎, 周定. 1996. 大气环境质量的灰色加权关联度法. 环境保护科学, 16 (4): 59~61
- 米传民, 刘思峰, 党耀国. 2004. 货币政策与股票价格波动的灰色关联度. 统计与决策, 12: 15~17
- 米传民, 刘思峰, 党耀国等. 2006. 灰色嫡权聚类决策方法研究. 系统工程与电子技术, 28 (12): 1823~1825
- 米传民, 刘思峰, 杨菊. 2004. 江苏省科技投入与经济增长的灰色关联研究. 科学学与科学技术管理, 25 (1): 34~36
- 穆勇. 2003a. 无偏灰色 GM (1, 1) 模型的直接建模法. 系统工程与电子技术, 25 (9): 1094~1097
- 穆勇. 2003b. 优化灰导数白化值的 GM (1, 1) 模型. 数学的实践与认识, 33 (3): 13~16
- 平雪良, 周儒棠, 党耀国. 2005. 未知自由曲面三坐标测量新方法. 机械科学与技术, 4 (24): 291~293
- 祁明德, 康仲春. 2004. 西藏区域经济系统的灰色关联分析. 运筹与管理, 13 (1): 77~81
- 邱克华. 2004. 管理决策与应用嫡学. 北京: 机械工业出版社
- 邱学军. 1995. 灰色聚类关联分析法及其应用. 系统工程理论与实践, 15 (1): 15~21
- 仇艺, 党耀国. 2006. 用电量的灰色——多元回归耦合模型预测. 华东电力, 34 (3): 186~189
- 史瑞卿, 孙维芬. 1999. 灰色聚类分析在地下水功能区划中的应用. 工程勘察, (1): 27~30
- 水乃翔, 秦禹春. 1998. 关于灰色系统 GM (1, 1) 模型的一些理论问题. 系统工程理论与实践, 18 (4): 59~63
- 宋彦辉, 聂德新. 2003. 基础沉降预测的灰色 Verhulst 模型. 岩土力学, 24 (1): 123~126
- 宋中民, 邓聚龙. 2001. 反向累加生成及灰色 GOM (1, 1) 模型. 系统工程, 19 (1): 66~69

- 宋中民, 刘希强, 王树泽. 1997. 灰色指数曲线拟合方法. 系统工程理论与实践, 17 (6): 55~57
- 宋中民. 2003. 灰色系统数学布置信息的研究. 华中科技大学博士学位论文
- 宋子齐, 谭成仟. 1997. 灰色系统理论精细评价油气储层的分析准则, 处理方法及其应用. 系统工程理论与实践, 17 (3): 74~82
- 孙才志, 宋彦涛. 2000. 关于灰色关联度的理论探讨. 世界地理, 19 (3): 248~252
- 孙光亮. 1996. 多层次评判模型及其应用. 系统工程, 14 (2): 62~67
- 孙玉刚, 党耀国. 2007a. 灰色斜率关联度的改进模型. 统计与决策, 15: 12, 13
- 孙玉刚, 党耀国. 2007b. 灰色 T 型关联度的改进. 系统工程理论与实践, 28 (4): 135~139
- 孙作安, 王奇. 1997. 分辨系数的作用及其确定方法. 辽宁工学院学报, 4: 71~82
- 谭冠军. 2000. GM (1, 1) 模型的背景值构造方法和应用 (I). 系统工程理论与实践, 20 (5): 70~97
- 谭学瑞. 1997. 灰色医学关联理论与应用研究. 华中理工大学博士学位论文
- 唐五湘. 1995a. T 型关联度及其计算方法. 数理统计与管理, 14 (1): 34~37
- 唐五湘. 1995b. GM (1, 1) 模型参数估计的新方法及假设检验. 系统工程理论与实践, 15 (3): 20~49
- 田建国, 黄锡玺. 1996. 一类灰色动态投入产出优化模型的设计及其在农业经济发展规划的应用. 经济数学, 13 (1): 64~70
- 同小军, 宋中民, 周龙. 2002. 一种新型灰色 Gompertz 模型. 系统工程理论与实践, 12 (12): 111~115
- 王惠霞, 冯俊文. 1995. 灰色预测模型与指数曲线模型的分析. 南京理工大学学报, 19 (3): 235~238
- 王坚强. 1999. 一类动态多指标决策问题的灰色关联分析方法. 中国工业大学学报, 30 (5): 548~550
- 王坚强. 2002. “奖优罚劣”的动态多指标灰色关联度模型研究. 系统工程与电子技术, 24 (3): 39~41
- 王清印, 崔援民. 2000. 不确定性系统预测理论的基本问题. 系统工程理论与实践, 20 (3): 93~98
- 王清印, 赵秀恒. 1999. C 型关联分析. 华中理工大学学报, 27 (3): 75~77
- 王文平, 邓聚龙. 1997. 灰色系统中 GM (1, 1) 模型的混沌特性研究. 系统工程, 15 (2): 13~15
- 王文平. 1997. 灰靶决策的效用理论研究. 华中理工大学学报, 25 (增刊): 89~91
- 王叶梅, 党耀国, 王正新. 2008a. 非等间距 GM (1, 1) 模型背景值的优化. 中国管理科学, 16 (4): 159~162
- 王义阔, 刘光珍, 刘开第. 2000. GM (1, 1) 模型的一种逐步优化直接建模法. 系统工程理论与实践, 20 (9): 99~104
- 王玉振, 周文安. 1995. 煤矿安全评价的灰色统计方法. 中国管理科学, 3 (3): 35~39
- 王玉振, 周文安. 1997. 回采工作面安全评价的改进灰色统计方法. 系统工程理论与实践, 17 (9): 118~123
- 王正新, 党耀国, 刘思峰. 2007. 无偏 GM (1, 1) 模型的混沌特性分析. 系统工程理论与实践, 27 (11): 153~158
- 王正新, 党耀国, 刘思峰. 2008a. 基于离散指数优化的 GM (1, 1) 模型. 系统工程理论与实践, 28 (2): 61~67
- 王正新, 党耀国, 刘思峰. 2008b. 两阶段灰色模型及其应用. 系统工程理论与实践, 28 (11): 109~114
- 王子亮. 1998. 灰色建模技术理论. 华中理工大学博士学位论文
- 夏军, 赵红英. 1996. 灰色人工神经网络模型及其在径流短期预报中的应用. 系统工程理论与实践, 16 (11): 82~90
- 肖新平, 邓聚龙. 2000. 乘数变换下的 GM (0, N) 的参数特征. 系统工程与电子技术, 22 (10): 1~3
- 肖新平, 黎德杨. 1996. 灰色关联分析应用的最新进展. 大自然探索, 15 (4): 50~56

- 肖新平, 宋中民, 李峰. 2005. 灰技术基础及其应用. 北京: 科学出版社. 174~178
- 肖新平, 肖伟. 1997. 灰色最优聚类理论模型及其应用. 运筹与管理, 6 (1): 21~26
- 肖新平, 谢录臣, 黄定荣. 1995. 灰色关联度计算的改进及其应用. 数理统计与管理, 14 (5): 27~30
- 肖新平. 1995. 灰色关联度计算的改进及其应用. 数理统计与管理, 14 (5): 27, 30~100
- 肖新平. 2002. 灰色系统模型方法的研究. 华中科技大学博士学位论文
- 肖新平. 1997. 关于灰色关联度量化模型的理论研究与评论. 系统工程理论与实践, 17 (8): 76~81
- 谢开贵, 李春燕. 2000. 基于遗传算法的 GM (1, 1) 模型. 系统工程学报, 15 (2): 168~172
- 谢乃明, 刘思峰. 2004a. 灰色层次分析法及其定位求解. 江南大学学报, 3 (1): 87~89
- 谢乃明, 刘思峰. 2004b. 强化算子的性质与若干实用缓冲算子的构造. 南京航空航天大学学报, 36 (4): 581~585
- 谢乃明, 刘思峰. 2005. 离散 GM (1, 1) 模型与灰色预测模型建模机理. 系统工程理论与实践, 25 (1): 93~99
- 谢乃明, 刘思峰. 2006a. 离散灰色模型的拓展及其最优化解. 系统工程理论与实践, 26 (6): 108~112
- 谢乃明, 刘思峰. 2006b. 一类离散灰色模型及其预测效果研究. 系统工程学报, 21 (5): 520~523
- 谢乃明, 刘思峰. 2007. 几类关联度模型的平行性和一致性研究. 系统工程, 25 (8): 98~103
- 熊和金, 陈绵云, 翟坦. 1999. 灰色聚类的几个问题. 系统工程与电子技术, 21 (5): 6~9
- 熊和金, 陈绵云, 翟坦. 2000. 灰色关联度公式的几种扩展. 系统工程与电子技术, 22 (1): 8~11
- 许秀莉, 罗健. 2002. 一种改进的灰色聚类方法. 厦门大学学报, 41 (1): 26~29
- 薛新伟, 王冬. 1997. 灰色投入产出理论及模型方法初探. 系统工程理论与实践, 17 (1): 56~61
- 徐泽水. 2004. 不确定多属性决策方法及应用. 北京: 清华大学出版社
- 杨晓华, 张国挑, 金菊良. 1998. 灰色系统模型 GM (1, 1) 的参数估计方法. 干旱环境监测, 12 (2): 76~80
- 杨益民. 1997. 动态多指标决策的一种新关联分析法. 系统工程与电子技术, 19 (11): 9~11
- 曾文艺, 罗承忠. 1997. 区间数的综合决策模型. 系统工程理论与实践, 17 (11): 48~50
- 查金茂. 1997. T 型关联度的缺陷. 武汉大学学报, 21 (1): 89~92
- 翟军, 盛建明. 1997. MGM(1, N) 灰色模型及应用. 系统工程理论与实践, 17 (5): 109~113
- 翟振杰, 刘斌, 党耀国. 2006. 一种新的关联度量化模型及其在农民收入结构分析中的应用. 农业系统科学与综合研究, 22 (1): 1~4
- 詹前涌. 2000. 灰色多层次决策模型及其在试卷质量评价中的应用. 系统工程理论与实践, 2 (7): 135~138
- 张辉, 胡适耕. 2001. GM (1, 1) 模型的边值分析. 华中科技大学学报, 10 (4): 110, 111
- 张吉峰. 1995. 灰色周期分析. 系统工程理论与实践, 15 (11): 76~80
- 张敏, 党耀国, 王瑞等. 2007. 江苏省“十一五”时期科技人才需求预测分析及政策建议. 科技进步与对策, 24 (5): 164~167
- 张岐山. 2002. 灰聚类分析结果灰性的测度. 中国管理科学, 1: 54~56
- 张岐山, 郭喜江, 邓聚龙. 1996. 灰关联熵分析方法. 系统工程理论与实践, 16 (8): 7~11
- 张岐山. 1996. 灰关联熵的变异信息理论. 华中理工大学博士学位论文
- 张绍良, 张国良. 1996. 灰色关联度计算方法比较及其存在问题分析. 系统工程, 14 (3): 45~49
- 赵艳林, 韦树英, 梅占馨. 1998. 灰色欧几里德关联度. 广西大学学报 (自然科学版), 23 (1): 10~13
- 赵艳林. 1999. 模糊灰关联模式识别方法及其应用. 系统工程理论与实践, 6: 67~70
- 郑照宁, 武玉英, 包涵龄. 2001. GM 模型的病态性问题. 中国管理科学, 5: 38~44

- Bryson N, Mobolurin A. 1996. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems. *European Journal of Operational Research*, 96: 379~386
- Cao M X, Dang Y G, Mi C M. 2006. An improvement on calculation of absolute degree of grey incidence. *IEEE SMC* 2006, Taipei, Taiwan. 452~454
- Chang K C, Yeh M F. 2005. Grey relational analysis based approach for data clustering. *IEEE Proceedings-Vision, Image & Signal Processing*, 152 (2): 165~172
- Chen H S, Chang W C. 2000. Optimization of GM (1, N) modeling. *Journal of Grey System*, 12 (3): 212~218
- Chen J L, Wen J H. 2000. On class ratio in grey modeling. *The Journal of Grey System*, 12 (3): 229~232
- Chen Y K, Tan X R. 1995. Grey relational analysis on serum markers of liver fibrosis. *The Journal of Grey System*, 7 (1): 63~68
- Dang Y G, Liu S F, Liu B. 2004a. Study on grey synthetic clusters appraisals model. *IEEE SMC*, 2398~2402, International Conference on Systems, Man and Cybernetics
- Dang Y G, Liu S F, Liu B. 2005a. On the multi-attribute incidence decision model for interval number. *The IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*. 711~715
- Dang Y G, Liu S F, Mi C M. 2004b. The study on two-stage grey cluster evaluating model without prominence difference of cluster coefficient. *Proceedings of 2004 International Conference on Management Science & Engineering*. 657~662
- Dang Y G, Liu S F, Zhou J, et al. 2007. Study on the integrated decision model of grey hierarchy. *IEEE SMC 2007, International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. 2187~2190
- Dang Y G, Liu S F, Zhou J. 2005b. The choice and mathematical model of leading industries in Jiangsu Province, China-USA Business Review, 7: 10~15
- Dang Y G, Liu S F. 2004. The GM models that $x(n)$ be taken as initial value. *The International Journal of Systems & Cybernetics*, 33 (2): 247~255
- Dang Y G, Liu S F, Liu B, et al. 2006. Grey situation decision model of interval number. *A Journal of the International Institute for General Systems Studies*, 7 (2): 103~110
- Dang Y G, Liu S F, Mi C M. 2005c. Grey incidence decision model with multi-attribute interval number. *Proceedings of International Conference 13th International Congress of Cybernetics and Systems*. 77~82
- Dang Y G. 1995. Valuation of grey clustering with human experience. *The Journal of Grey System*, 7 (2): 179~184
- Deng J L, David K W Ng. 1996. Chaos in grey model GM (1, N). *The Journal of Grey System*, 8 (1): 1~10
- Deng J L. 1998a. Properties of Relational Space for Grey System. Wuhan: China Ocean Press. 1~13
- Deng J L. 1997a. A novel GM (1, 1) model for non-equigap series. *The Journal of Grey System*, 9 (2): 111~116
- Deng J L. 1997b. Applications of tacit consent rationale to grey analysis. *The Journal of Grey System*, 9 (1): 82~88
- Deng J L. 1997c. Tacit consent rationale in grey inference. *The Journal of Grey System*, 9 (1): 1~8
- Deng J L. 1998b. Grey Decision Making of Group. In: Deng J L. *Grey System*. Wuhan: China Ocean Press. 115~129
- Deng J L. 1998c. Grey group decision in grey rationale space. *The Journal of Grey System*, 10 (3):

177~182

- Deng J L. 1998d. Connotations on grey target. The Journal of Grey System, 10 (1): 22~28
- Deng J L. 1998e. The grey exponential law of AGO. In: Deng J L. Grey System. Wuhan: China Ocean Press. 31~39
- Deng J L. 2001. Negative power AGO in grey theory. The Journal of Grey System, 13 (3): 299~300
- Deng J L. 2002. Solution of grey differential equation for GM (1, 1 | τ , r) in matrix train. The Journal of Grey System, 14 (1): 105~110
- Fang X, Zou S G, Tang Y Z. 2000. The comprehensive evaluation of region scientific and technological innovation. The Journal of Grey System, 12 (4): 347~356
- Feng Y C, Li D, Wang Y Z, et al. 2001. A grey model for response time in database system DM3. Journal of Grey System 41 (2): 67~74
- He X J, Sun G Z. 2001. A non-equigap grey model NGM (1, 1). The Journal of Grey System, 13 (2): 189~192
- Hsu Y, Jerome Y, Wu D G. 2000. A zone-based grey relational model. The Journal of Grey System, 12 (3): 225~228
- Huang Y P, Chu H C. 1996. Practical consideration for grey modeling and its application to image processing. The Journal of Grey System, 8 (3): 217~233
- Jiang C W, Hou Z J, Zhang Y C. 2000. Chaos analysis of the grey forecasting model. Journal of Grey System, 3 (1): 43~52
- Kuo C Y, Ching J L, Yen Tesng Hsu. 2000. Generalized admissible region of class ratio for GM (1, 1). The Journal of Grey System, 12 (2): 153~156
- Li G D, Daisuke Y, Massatake N. 2005. New methods and accuracy improvement of GM according to Laplace Transform. The Journal of Grey System, 8 (1): 13~24
- Li S C, Chang L. 2001. Grey relational assessment of technology innovation capability of enterprises. The Journal of Grey System, 13 (2): 171~174
- Lin J L, Wang K S, Yan B H, et al. 2000. Optimization of parameters in GM (1, 1) model by Taguchi method. Journal of Grey System, 11 (4): 248~252
- Lin Y, Liu S F. 2000. Law of exponentiality and exponential curve fitting. Systems Analysis Modelling Simulation (SAMS), 38: 621~636
- Liu B, Liu S F, Dang Y G. 2003. The GST-based data mining techniques of time sequences. Proceedings of the 32nd International Conference on Computers & Industrial Engineering. 548~553
- Liu M C, Hong C M. 1997. A study on the implementation of evaluation criteria for computer skill instruction grey relational analysis. The Journal of Grey System, 9 (2): 117~130
- Liu S F, Dang Y G, Ruan A Q. 2005. Study on degree of orderliness of regional industrial structure. Conference Proceedings-IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. 1540~1545
- Liu S F, Dang Y G. 1997. The positioned solution of the linear programming with grey parameters. Advance in Systems Science and Application, 3 (1): 371~377
- Liu S F, Forrest J. 1997. The role and position of grey system theory in science development. The Journal of Grey System, 9 (4): 351~356
- Liu S F, Lin Y. 1998. An Introduction to Grey System. Slippery Rock: IIGSS Academic Publisher
- Liu S F, Zhu Y G. 1996a. Grey-econometrics combined model. The Journal of Grey System, 8 (1):

- 103~110
- Liu S F, Dang Y G. 1999a. Technical change and the funds for science and technology. *Proceedings of APIEMS'99*. 435~438
- Liu S F, Dang Y G. 2004c. Synthetic utility index method and venturous capital decision making, *The International Journal of Systems & Cybernetics*, 33 (2): 288~294
- Liu S F, Deng J L. 1999b. The range suitable for GM (1, 1). *The Journal of Grey System (UK)*, 11 (1): 131~138
- Liu S F, Lin Y, Dang Y G. 2004a. Technical change and funds for science and technology. *The International Journal of Systems & Cybernetics*, 33 (2): 295~303
- Liu S F, Zhao L, Dang Y G. 2004b. The G-C-D model and technical change. *Kybernetes*, 33 (2): 303~310
- Liu S F. 1996. Axiom on grey degree. *The Journal of Grey System (UK)*, 8 (4): 397~400
- Liu S F, Forrest J. 1997. The role and position of grey system theory in science development. *The Journal of Grey System (UK)*, 9 (4): 351~356
- Ma S S, Sun X C. 1997. Grey model on groundwater quality. *The Journal of Grey System*, 9 (2): 181~186
- Mi C M, Liu S F, Dang Y G, et al. 2006a. Study on grey fixed weight clustering decision-making based on entropy weight. *IEEE SMC* 2006. 461~465
- Mi C M, Liu S F, Dang Y G, et al. 2006b. Case retrieving based on grey incidence degree in CBR. *Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation*. 4387~4391
- Pan H P, Huang Z H. 1996. Recognizing lithofacies via grey clustering. *The Journal of Grey System*, 8 (1): 93~102
- Ping X L, Zhou R R, Dang Y G. 2003. A real-time online grey prediction model for CMM measuring. *Proceedings of the 32nd International Conference on Computers & Industrial Engineering*. 532~537
- Ren H B, Dang Y G, Wang Z X. 2007. GM(1, 1) model of time sequence coefficient and application. *2007 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services*. 445~447
- Song Z M, Wang Z D, Tong X J. 2001. Grey generating space on opposite accumulation. *The Journal of Grey System*, 13 (4): 305~308
- Song Z M, Xiao X P, Deng J L. 2002. The character of opposite direction AGO and its class ratio. *The Journal of Grey System*, 14 (1): 9~14
- Sun Y G, Dang Y G, Zhou J, et al. 2007. Improvement on grey T's incidence degree. *2007 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services*. 200~203
- Tan X R, Deng J L, Chu Y J. 1999. Grey relational analysis on circadian variation of plasma renin activity, angiotensin II and blood pressure in hypertensives. *The Journal of Grey System*, 11 (1): 41~46
- Tang X W, Liu S F, Liu B. 2003. Predicting the total investment in Jiangsu with grey system model. *Proceedings of the 32nd International Conference on Computers & Industrial Engineering*. 538~541
- Tu Y C, Lin C. 2001. Application of grey relational analysis to evaluating shopping mall in Taiwan. *The Journal of Grey System*, 13 (4): 327~338
- Wang J L, Liu S F, Dang Y G, et al. 2007. Consumer evaluation of service brand extension based on gray preference analysis. *IEEE SMC* 2007. 2215~2218
- Wang W P. 1997. Study on grey linear programming. *The Journal of Grey System*, 9 (1): 41~46
- Wang Y H, Dang Y G, Wang Z X. 2007. Model and application of grey comprehensive cluster ex-post evalu-

- ation. IEEE SMC 2007. 3860~3864
- Wang Y H, Dang Y G, Wang Z X. 2007. Study on grey fixed weight clustering decision-making based on interval numbers. 2007 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services. 341~345
- Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. 2007a. The optimization of background value in GM (1, 1) model. Journal of Grey System, 10 (2), 69~74
- Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. 2008. Study on the extending decision model of grey situation. 14th International Congress Of Cybernetics And Systems Of WOSCL. 1072~1081
- Wang Z X, Dang Y G, Wang Y M. 2007b. A new grey Verhulst model and its application, 2007 IEEE International Conference on Grey System and Intelligent Services. 571~574
- Wang Z L, Liu Y L, Shi K Q. 1995. On kenning grey degree. The Journal of Grey System, 7 (2), 103~110
- Wen J C, Chen J L, Yang J S. 2001. Study of the non-equipap modelling. The Journal of Grey System, 13 (3), 205~214
- Wen K L, Chang T C, Chang W C, et al. 1999. Data preprocessing for grey relational analysis. The Journal of Grey System, 11 (2), 139~141
- Wen K L, Wu J H. 1998. AGO for invariant series. The Journal of Grey System, 10 (1), 17~21
- Wu H H. 2002. A comparative study of using grey relational analysis in multiple attribute decision making problems. Quality Engineering, 15 (2), 209
- Wu J H, Lau C R. 1998. A study to improve GM (1, 1) via heuristic method. The Journal of Grey System, 10 (3), 183~192
- Wu W D, Pan Z L. 1999. Grey relational analyzing the associated elements of gold. The Journal of Grey System, 11 (2), 143~146
- Xie N M, Liu S F. 2008. Research on the order-keeping property of several grey relational models. Journal of Grey System, 11 (3), 157~164
- Xie N M, Liu S F. 2009a. Discrete grey forecasting model and its optimization, Applied Mathematical Modelling, 33 (1), 1173~1186
- Xie N M, Liu S F. 2009b. Research on evaluations of several grey relational models adapt to grey relational axioms. Journal of Systems Engineering and Electronics, 20 (2), 304~309
- Xu J P. 1995. On a kind of information grey number. The Journal of Grey System, 7 (2), 111~130
- Yao T X, Liu S F, Dang Y G. 2008. The improvement of discrete GM (1, 1) prediction model and its solution arithmetic. 2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 1415~1418
- Yeh J F, Lu H C. 1996. A new modified grey model. The Journal of Grey System, 8 (3), 209~216
- Yeh J F, Lu H C. 1996. On some of the basic feature of GM (1, 1) model (I). The Journal of Grey System, 8 (1), 19~36
- Yeh M F. 2002. Data clustering via grey relational pattern analysis. The Journal of Grey System, 15 (3), 239~251
- Yeh Y L, Chen T C, Lin C N. 2001. Effects of data characteristics for GM (1, 1) modeling. Journal of Grey System, 13 (3), 185~189
- Yen T H, Yeh J, Wu Dian geng. 2000. A zone-based grey relational model. The Journal of Grey System, 12 (3), 225~228

- Zhai Z J, Liu S F, Liu B, et al. 2007. Study on the optimum prediction model for GM. 2007 IEEE International Conference on Grey System and Intelligent Services. 419~422
- Zhang D H, Shi K Q, Jiang S F. 2001. Grey predicting power load via GM (1, 1) modified. Journal of Grey System, 13 (1): 42~48
- Zhang Q S. 2001. Difference information entropy in grey theory. The Journal of Grey System, 13 (2): 111~116